

波動光学の風景

多層編

本宮佳典 著

試し読み



Advanced Communication Media
アドコム・メディア株式会社

この電子書籍は、月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の、2008 年 8 月号から 2009 年 4 月号までに掲載された分をまとめたものである。多層膜の光学特性を解析する手法と、多層膜で実現される代表的な機能について紹介する。

既刊の薄膜編で、単層膜までの基本事項について紹介した。多層でも基本的な考え方は共通であり、境界面の数が増えただけと見ることもできる。しかし、その増え方は顕著である。数層から数十層は広く実用に供され、時に数百層にも及び、理論的には無限の繰り返しも考察の対象となる。

その自由度の高さから、多層膜ならではの多彩な現象が見られる。透明な膜が積層されているのに光が透過できなかったり、そのような多層膜が少し間を置いて重ねられると今度は光が透過できたりもする。また、波長依存性を抑制する工夫もあれば、急峻な波長特性を目指す努力もある。興味深い現象や巧みな工夫が豊富に見られる分野である。

こうした多様な現象を知り、それらを扱う技術や理論を理解することは、それだけでも興味深いものであるが、応用の観点からも大変重要である。本書では、これらの光学多層膜の解析手法として、前進波と後退波の振幅で各層内の場を表す方法と、特性行列を用いる方法について紹介する。どちらの方法も、基底の変換で容易に他方へ移行できるという意味で、等価なモデルである。しかし、実際の計算では前者が、理論的な検討では後者がやや使いやすい。そこで本書では、

両方の考え方と相互の関係についても説明した。

光学多層膜の代表的な応用例として、反射防止膜や、多層膜反射鏡、エッジフィルター、バンドパスフィルターなどの光学コーティングとその原理について紹介した。また、各層の作用と多層膜全体の特性との関係を視覚的に把握できる、アドミタンス軌跡を紹介した。多層膜の特性の成り立ちを理解し、応用を検討する上で参考になると思う。

光学薄膜は、20 世紀前半に真空技術が進歩して以降、急速に発展した。そして、特性の向上、波長域の拡大、使用環境や用途の多様化などに伴って、今も発展は続いている。実用を目指す、光学的な特性だけでなく、膜の機械的特性や、耐腐食性、材料コスト、成膜コスト等のさまざまな要素も考慮した材料選択や設計が必要になる。技術者の技量や装置に依存したノウハウなどにも及ぶ奥深い技術分野である。しかし、初歩的な光学計算によって知見が得られ、状況が理解でき、見通しが開けるということもしばしば経験する。過度に尻込みする必要はないと思う。

なお、参考までに、拙作のプログラム例を紹介した。実用目的ではなく、あくまでも本書の内容の具体的な理解が目的であり、動作や計算結果に対して責任を負うものではない。その旨をご理解の上、参考としてご利用いただければ幸いである。

読者のそれぞれの興味や関心の中で、本書が何らかの形でお役に立てるならば、著者の何よりの喜びである。

第 37 回	39.	光学多層膜
第 38 回	40.	バンドギャップ
第 39 回	41.	特性行列による多層膜の計算
第 40 回	42.	誘電体多層膜反射鏡
第 41 回	43.	二層反射防止膜
第 42 回	44.	アドミタンス軌跡
第 43 回	45.	アドミタンス軌跡と光学特性
第 44 回	46.	干渉フィルター
第 45 回	47.	多層膜特性の計算プログラム

波動光学の風景……◆37

39. 光学多層膜

単層膜から層を増やしていくと、さらに豊かな世界が広がる。各層の材料と厚さが設計パラメーターとなり、層数と共に光学特性の設計自由度が増大する。実際、多くの光学応用製品に、その用途に応じた光学多層膜が使われている。

単層膜の場合の光の場や反射率、透過率について第33章、第34章で説明したが、本章では改めて多層膜を想定しながら基本事項を整理する。その際、s, p 両偏光でなるべく共通の扱いができるようにしておく。

図 39-1 に示したように、多層膜に角周波数 ω の平面波が、 x - z 面を入射面（入射光の進行方向と境界面の

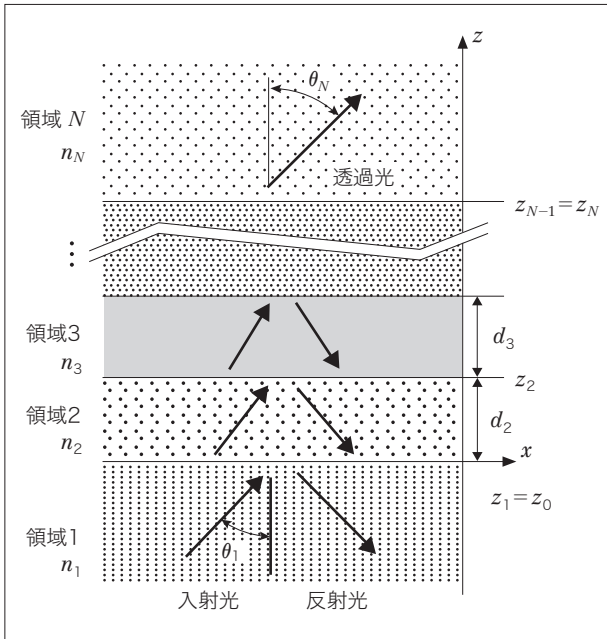


図 39-1 多層膜と反射屈折波のモデル

法線方向で張られる面）として、入射角 θ_1 で入射した状況を考える。時間因子は $\exp(-i\omega t)$ とする。領域 m 中の電磁場の空間部分は、マクスウェル方程式により

$$\text{rot} \mathbf{H}_m = -i\omega \epsilon_m \mathbf{E}_m \quad (39-1)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_m = i\omega \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (39-2)$$

$$\text{div} \mathbf{E}_m = 0 \quad (39-3)$$

$$\text{div} \mathbf{H}_m = 0 \quad (39-4)$$

を満たす ($m=1, \dots, N$)。式(39-2)の rot をとり、式(39-1)を使って磁場 \mathbf{H}_m を消去すると、

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}_m) = i\omega \mu_0 \text{rot} \mathbf{H}_m = \omega^2 \mu_0 \epsilon_m \mathbf{E}_m = k_0^2 n_m^2 \mathbf{E}_m \quad (39-5)$$

となる。これに、ベクトル解析の公式

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = \text{grad} \text{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (39-6)$$

および、式(39-3)を用いると、ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E}_m + k_m^2 \mathbf{E}_m = 0 \quad (39-7)$$

が得られる。ただし、

$$k_m = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_m} = k_0 n_m \quad (39-8)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (39-9)$$

$$n_m = \sqrt{\epsilon_m / \epsilon_0} \quad (39-10)$$

と置いた。ここで n_m は、領域 m の媒質の屈折率である。吸収性のある物質では虚数成分を持つことになる。このとき、式(39-7)の解として、

波動光学の風景……◆39

41. 特性行列による多層膜の計算

第39章で多層膜に平面波が入射したときの場を求める計算手法について説明した。各層の光の場の固有モードとして前進波と後退波があることを用い、前進波の複素振幅 a_m と後退波の複素振幅 b_m によって第 m 層中の場を記述した。隣接する層との境界面で電場と磁場の境界面内方向成分が連続であることが必要である。この境界条件は数式的には複素振幅 a_m, b_m についての代数方程式となり、連立1次方程式を解くことで場が求まる。このように、固有モードを求め、それらを基底としてその線形結合で一般的な解を表現する手法は、線形微分方程式の解法として広く用いられる一般的な手法である。

ところで、線形空間の基底は一意的なものではなく、別の基底によって表現することも可能である。多層光学薄膜の設計等でよく用いられる手法として、前進波と後退波の振幅を用いる代わりに、境界面での電場と磁場の振幅を用いる方法がある。本章ではそれを紹介する。図

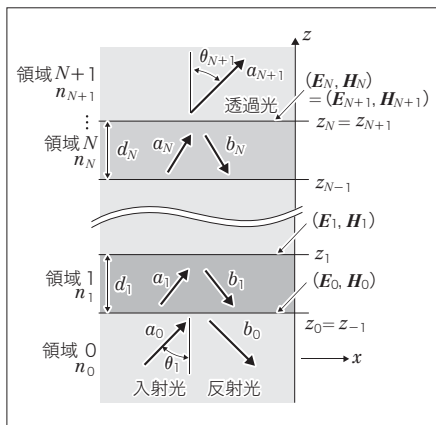


図41-1 多層薄膜のモデル

41-1のように領域の番号を付した層数 N の系を考える（第39章と番号の付し方を少し変えてある）。なお、時間発展を表す位相因子は $\exp(-i\omega t)$ とする。

まず、s偏光の場合、領域 m の電場と磁場は、前進波と後退波を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m = \begin{pmatrix} E_{mx} \\ E_{my} \\ E_{mz} \end{pmatrix} = a_m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[ik_{mx}x + ik_{mz}(z - z_{m-1})] \\ + b_m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[ik_{mx}x + ik_{mz}(z_m - z)] \end{aligned} \quad (41-1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m = \begin{pmatrix} H_{mx} \\ H_{my} \\ H_{mz} \end{pmatrix} = \frac{a_m}{\omega\mu_0} \begin{pmatrix} -k_{mz} \\ 0 \\ k_{1x} \end{pmatrix} \exp[ik_{mx}x + ik_{mz}(z - z_{m-1})] \\ + \frac{b_m}{\omega\mu_0} \begin{pmatrix} k_{mz} \\ 0 \\ k_{1x} \end{pmatrix} \exp[ik_{mx}x + ik_{mz}(z_m - z)] \end{aligned} \quad (41-2)$$

と書くことができる[第39章の式(39-16), (39-17)参照]。このとき、領域 $m+1$ との境界条件は、 $z = z_m$ において電場と磁場の境界面内方向成分が連続との条件から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_{m+1}n_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\beta_m) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_{m+1,z}n_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\beta_{m+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41-3)$$

波動光学の風景……◆40

42. 誘電体多層膜反射鏡

透明な誘電体で高反射率の多層膜反射鏡を実現することができる。バンドギャップ（第 40 章参照）を構成するような多層膜を構成すれば、光は進入することも吸収されることもないから、全部反射するしかない。効率的に反射鏡を構成するためには、図 42-1 のように、高屈折率の膜と低屈折率の膜とを交互に成膜するとよい。図中の矢印で示したように、ある境界面で反射した光と、1 層先まで進んで反射した光とが強め合う条件だと、反射率が効率よく向上する。膜厚を膜媒質中の波長の 1/4 に設定すると、往復分の光路が半波長に相当して位相が 180° 遅れる。また、屈折率が大きい媒質から小さい媒質に向かう境界面と、小さい媒質から大きい媒質に向かう境界面とでは、反射に際しての位相変化が 180° 異なる。この 2 つの効果から、両経路の反射光の位相がそろい、強め合う。このような多層膜に対して、特性行列を使って反射率を求めてみよう。

領域 m （外部領域は 0、基板は s で表す）の、垂直入射光に対する特性行列を

$$\mathbf{M}_m = \begin{pmatrix} \cos \beta_m & -i n_m^{-1} \sin \beta_m \\ -i n_m \sin \beta_m & \cos \beta_m \end{pmatrix} \quad (42-1)$$

とすると、多層膜前後の光の場の関係は

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0/Y_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_N \begin{pmatrix} E_N \\ H_N/Y_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_s \\ H_s/Y_0 \end{pmatrix} \quad (42-2)$$

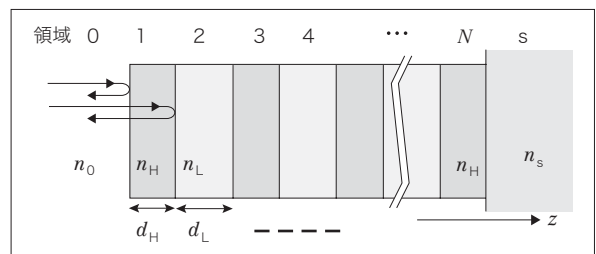


図 42-1 誘電体多層膜反射鏡

となる [第 41 章式(41-13), (41-14)参照]。ただし、 E_m, H_m は電場の y 方向成分と磁場の $-x$ 方向成分、 n_m は領域 m の屈折率、 $Y_0 = 1/(c_0 \mu_0)$ は真空のアドミタンス [式(41-9)参照] とする。また、パラメーター β_m は層厚分の位相差を表し、真空中の波長を λ_0 とすると

$$\beta_m = k_m d_m = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_m d_m \quad (42-3)$$

である。膜厚が $\lambda/4$ というのは $\beta_m = 2\pi \times (1/4) = \pi/2$ となるような厚さである。

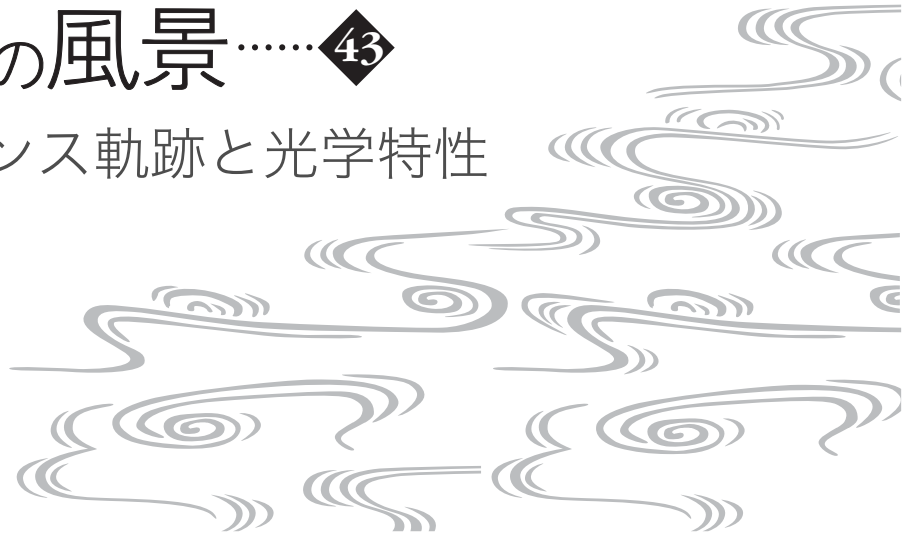
なお、高屈折率で膜厚が $\lambda/4$ の層を H、低屈折率で膜厚が $\lambda/4$ の層を L で表して、膜構造を [HLHLH] あるいは [(HL)²H] のように表したり、外部の屈折率 n_0 や基板屈折率 n_s を付して $[n_0 \text{HLHLH} n_s]$ と表す習慣がある。

以下では、層数 N は奇数とする。また、各層の厚さは、

$$d_m = \frac{\lambda_0}{4n_m} = \begin{cases} \lambda_0 / (4n_H) & (m = 1, 3, \dots, N) \\ \lambda_0 / (4n_L) & (m = 2, 4, \dots, N-1) \end{cases} \quad (42-4)$$

波動光学の風景……◆43

45. アドミタンス軌跡と光学特性



前章でアドミタンス軌跡の概要を説明した。本章ではいくつかの多層膜について、アドミタンス軌跡と光学特性との関係を眺めてみる。具体例を見るとイメージを持ちやすくなると思う。

〈多層膜反射鏡〉

図 45-1 は多層膜反射鏡 $[n_0(\text{HL})^4\text{H}n_s]$ ($n_L=1.38$, $n_H=2.40$, $n_s=1.52$) のアドミタンス軌跡である (第 42 章で扱ったものと同じ構造)。基板屈折率 $n_s=1.52$ をアドミタンス軌跡の起点とし、屈折率 n_H の層を厚さが 4 分の 1 波長になるまで積み重ねる。このとき、複素平面上の 2 点 $-n_H$ と n_H からの距離の比を一定とするアポロニウスの円に沿って左回りに軌跡が描かれ、下半円になる。次に屈折率 n_L の層を 4 分の 1 波長厚まで積み重ねる。今度は複素平面上の 2 点 $-n_L$ と n_L からの距離

の比を一定とするアポロニウスの円に沿って左回りに軌跡が描かれ、上半円の軌跡となる。同様に半円ずつの軌跡がつながるが、次第に大きな軌跡を描き、最終的なアドミタンス η_0 は値の大きな実数となる。そのときの振幅反射率 r は、外部の屈折率を n_0 とすると、

$$r = \frac{n_0 - \eta_0}{n_0 + \eta_0} \quad (45-1)$$

で与えられる [第 44 章式(44-18)]。すなわち、振幅反射率は -1 に近い値になる。反射率はその絶対値の 2 乗となるので 1 に近い値になる。

図 45-1 の軌跡をたどると分かるように、 L と H の層を増やすほど η_0 は大きくなり、反射率は 1 に近づく。初期値である基板屈折率 n_s が n_H 以下であれば、アドミタンス軌跡は同様にスパイラル状に大きくなり、反射率は増加して 1 に近づくことが分かる。これに対してあまり現実的ではないかもしれないが、仮に初期値 n_s が n_H よりも大きい場合、膜が形成されるとアドミタンス軌跡は最初は小さくなる。しかし、さらに層を重ねると、アドミタンスは増大に転ずる。つまり最初は反射防止膜のように作用するが、層が重なると基板材料によらず反射鏡になる。

図 45-2 に、この計算に用いたプログラムを示す。計算は前章の式(44-19)

$$\eta_B = \frac{-i n \sin \beta + \eta_A \cos \beta}{\cos \beta - i n^{-1} \eta_A \sin \beta} \quad \text{再掲(44-19)}$$

に従った。層の番号は入射側、すなわち屈折率 n_0 の側

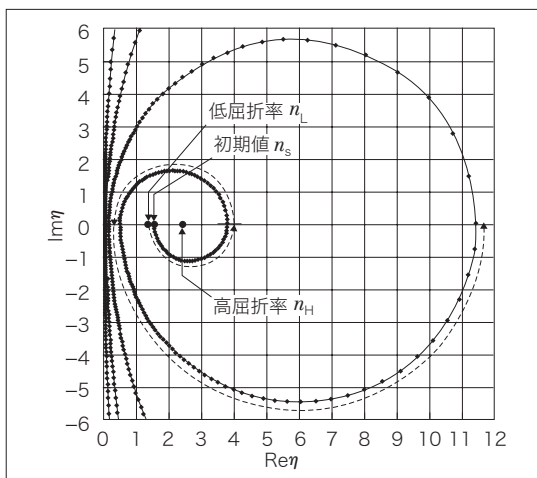


図 45-1 多層膜反射鏡 $[n_0(\text{HL})^4\text{H}n_s]$ のアドミタンス軌跡 ($n_L=1.38$, $n_H=2.40$, $n_s=1.52$)

表 47-2 サブルーチン mlf の入出力パラメーター

引数	入／出	型	内 容
r	出力	実数	反射率 (%)
t	出力	実数	透過率 (%)
pr	出力	実数	反射光の位相 (°)
pt	出力	実数	透過光の位相 (°)
n	入力	複素配列 (寸法:nn)	複素屈折率 ($=n+ik$)
d	入力	実配列 (寸法:nn)	層厚 (wlと共通の単位) (d(1)=d(m)=0.0)
m	入力	整数	領域数=層数+2
wl	入力	実数	波長 (dと共通の単位)
th	入力	実数	入射角 (°)
j	入力	整数	1:s偏光, 2:p偏光
nn	入力	整数	配列n, dの寸法 ($m \leq nn$)

コールシーケンス:

call mlf(r, t, pr, pt, n, d, m, wl, th, j, nn)

位と共通であればよい。領域 1 と N の厚さは実際には無限大だが、プログラムでは 0 を入れる。

サブルーチンの入出力パラメーターを表 47-2 に示す。また、サブルーチンのソースコードを図 47-3 に示す。対象となる多層膜の領域数は配列の寸法により制約されるが、整合寸法としていてメインプログラムで任意の寸法を宣言できるので、実質的な制約は計算機で決まる。各領域の媒質の光学定数や層の厚さを配列に格納してサブルーチンと呼ぶが、それ以外の配列は使用していない。したがって、作業領域を確保するための配列をメインプログラムで用意する必要はない。

計算結果を図 47-4 に示す。プログラムは自宅の Windows パソコンで作成し、Cygwin²⁾ の g77 でコンパイルし実行した。各行頭の文字 s, p は偏光を示す。各列は左から、反射率 (%), 透過率 (%), 反射光の位相 (°), 透過光の位相 (°) を表す。

このプログラム例と比較すると、市販のツールはプログラム規模がかなり大きい。これは、もちろん機能や性能が優れているためである。例えば、代表的な基板材料や膜材料のデータベースを持っていたり、代表的な層構造のデータベースを持っていたり、複雑なモデルを設定しやすいヒューマンインターフェースを持っていたり、自動設計機能を持っていたり、光学設計ツールとデータを共有できたり、入力の妥当性をチェックする機能を持っていたりする。内部処理の詳細は不明だが、精度や速度や使用メモリー量などの観点から、条件によって処理を変えていることも推測される。

本章で紹介したプログラムにはそうした配慮が十分

```

subroutine mlf(r, t, pr, pt, n, d, m, wl, th, j, nn)
implicit double precision(a-h, o-z)
complex*16 n, um, zm, a, q, z, b1, b2, f1, f2, u1, u2
dimension n(nn), d(nn)
data pi /3.141592653589793238462643383279/
f2=0
a =1
do i=m, 1, -1
  z=sqrt(1-(sin(th*pi/180)*n(1)/n(i))**2)
  u1=z*n(i)**(3-2*j)
  b1=exp((0., 2.)*pi*n(i)*z*d(i)/wl)
  if(i.eq.m)then
    um=u1
    zm=z
  else
    q =(u1-u2)/(u1+u2)
    f1=b1*(q+f2*b2)/(1+q*f2*b2)
    a =a*(b1+f1)/(1+f2*b2)
    f2=f1
  endif
  u2=u1
  b2=b1
enddo
r =abs(f1)**2*100
t =abs(a)**2*dble(um)/dble(u1)*100
pr=atan2(-imag(f1), dble(f1))*180/pi
q =a*(zm*n(1)/(n(m)*z))**(j-1)
pt=atan2(-imag(q), dble(q))*180/pi
return
end

```

図 47-3 多層膜計算用のサブルーチンプログラム例 (FORTRAN77)

s	37.1472	3.4590	140.0421	-106.4324
p	26.1427	3.8856	-52.5815	-110.4992

図 47-4 多層膜計算の出力例

ではないので、実用に供するのには必ずしも適当ではない。しかしながら規模が小さいことから、理論と数式とプログラムの対応関係は見やすいと思う。プログラミングの過程は、単なるツール作成作業としての意味にとどまるものではない。光の場の振幅を定めるために必要な、情報と処理手順が明らかになる。理論や数式の導出が一通り理解できるようになったレベルから、現象の理解がもう一歩進むように思う。できれば独力で挑戦するのが理想だが、敷居を高く感じる方は本稿を参考にさせていただきたい。

参考文献

- 1) <http://ece-www.colorado.edu/~bart/book/ellipstb.htm>
- 2) <http://cygwin.com/>

※ Cygwin は、Red Hat Inc.の商標または登録商標です。
 ※ Windows は、米国 Microsoft Corporation の米国およびその他の国における登録商標です。

■ 事項

	頁	カラム	行		頁	カラム	行
アドミタンス	28	左	14	多層膜反射鏡	19	左	1
アドミタンス軌跡	28	左	3	多層膜反射鏡	34	左	5
アポロニウスの円	31	右	1	単層反射防止膜	35	右	4
アポロニウスの円	34	左	11	短波長通過	38	左	16
色ガラス	38	左	9	長波長通過	38	左	16
エタロン	39	右	下 4	透過率	5	左	10
エッジフィルター	38	左	下 10	等反射率曲線	37	左	8
円弧	30	右	下 8	特性行列	14	右	下 10
干渉フィルター	38	左	11	特性方程式	22	左	5
基板屈折率	29	右	9	特性マトリックス	14	右	下 10
狭帯域通過	39	右	下 7	2 層反射防止膜	35	左	13
金属ナノコロイド	38	左	10	8 分の 1 波長層	39	左	4
金属膜	36	左	下 5	反射防止膜	24	左	1
光学多層膜	1	左	4	反射率	5	左	8
固有値	22	左	5	バンド	12	右	2
コンパイル	48	左	13	バンドギャップ	8	右	11
遮断波長	39	右	3	バンドギャップ	12	右	5
真空のアドミタンス	14	左	下 8	半波長膜	35	右	3
真空のアドミタンス	29	左	下 10	ファブリー・ペロー	39	右	下 6
真空のインピーダンス	29	左	下 10	ファブリー・ペロー型フィルター	41	右	5
振幅透過率	4	左	下 6	フォトリソグラフィ	9	左	6
振幅透過率	16	右	8	フォトリソグラフィ	8	右	下 19
振幅反射率	4	左	下 6	フォトリソグラフィ	8	右	下 16
振幅反射率	16	右	8	プログラム	44	左	4
帯域通過	38	左	17				

■ 人名

	頁	カラム	行
Apollonius	33	人物	1
Bragg, Henry	23	人物	1
Bragg, Lawrence	23	人物	17
Eukleides	33	人物	9
Fabry	39	右	下 5
Perot	39	右	下 5
Yablonovitch	9	左	8
大高一雄	9	右	2

著者略歴

本宮佳典 (ほんぐう・よしのり), Yoshinori Hongu



1956年 神奈川県藤沢市生まれ
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業
1979年 東京大学理学部物理学科卒業
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士
同年、株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー
2018年 株式会社東芝 研究開発センター (2021.10退職)
法政大学理工学部 (兼任講師) (2018.4～)

第20回 (2019年度) 応用物理学会業績賞 (教育業績) 受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。 <https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/>

波動光学の風景 多層編

2013年7月25日初版発行

2023年2月1日第2版発行

著者 本宮 佳典
発行者 喜多 野乃子
発行所 アドコム・メディア株式会社
〒169-0073 東京都新宿区百人町2-21-27
電話 (03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2013

ISBN978-4-910636-13-9 C3042 ¥3300E

© Yoshinori Hongu 2013

印刷/製本 樹ブックフロント

Printed in Japan

・本書に掲載する著作物の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権
(送信可能化権を含む)はアドコム・メディアが保有します。

・**JCOPY** <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、
出版者著作権管理機構 (電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, E-mail info@jcopy.or.jp) の
許諾を得てください。