波動光学の風景

媒質編

本宮佳典 著

試し読み

Advanced Communication Media
アドコム・メディア株式会社

はじめに

この電子書籍は，月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の，2006 年 5 月号から 11 月号までに掲載されたものをまとめたものである。既刊の導入編では，波動光学の基礎となるマクスウェル方程式までを説明した。この媒質編ではそれを受けて，媒質中の光の場を扱うためのモデルや概念を紹介し，物質中のマクスウェル方程式を導いて，誘電体や金属における光の基本的な挙動について考える。

古典力学にはニュートンの運動方程式がある。単純な形の方程式でありながら，種々の力学系におけるさまざまな運動を説明することができる。また，運動量やエネルギーなど，現象をより深く理解するための重要な概念も導かれる。しかし，ニュートンの運動方程式を見つめているだけでは，そこから導かれる多様な現象の全貌を想像することは難しいであろう。まずは色々な物理現象が基礎方程式を使ってどのように説明されるのかを，単純な現象から順に理解していくことが必要である。そうする内に，基礎方程式の支配する世界の広さ，豊かさを把握できるようになるのだと思う。

波動光学においても，マクスウェル方程式を眺めているだけでは，そこから展開される多様な光学現象の世界を想像することは容易でない。やはり単純な現象から順に，マクスウェル方程式でどのように説明されるのかをしっかり見て，きちんと理解できる事例を一つずつ増やしていくことが必要である。その過程で，さまざまな興味深い風景を眺められるのではないかと思う。そのような見どころを，できれば色々な視点から，じっくりと味わっていただきたい。

理解できる現象が増えるにしたがって，同じ基礎方程式から導かれる現象世界の広大無辺なる様や，その細部に宿り給うものの気配が感じられることもあるかもしれない。読者が光学への興味を深めていくことに，本書が少しでもお役にたてるならば，著者の何よりの喜びである。

2013 年 1 月　本宮 佳典

目　次

第 10 回　12.　真空中の電磁波
第 11 回　13.　線形時不変システムの応答
第 12 回　14.　荷電粒子と光の相互作用
第 13 回　15.　物質中のマクスウェル方程式
第 14 回　16.　物質中の電磁波
第 15 回　17.　誘電体
第 16 回　18.　金属中の光

波動光学の風景……⑩

12. 真空中の電磁波

真空中のマクスウェル方程式を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ で書き下すと，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{12–1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{12–2}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0 \tag{12–3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0 \tag{12–4}$$

となる。式(12–1)と(12–2)から分かるように，電場の時間発展は磁場の空間的な状態で決まり，磁場の時間変化は電場の空間的な状態で決まる。これらの2式から $\boldsymbol{H}$ を消去して，$\boldsymbol{E}$ の満たす方程式を導く。それが波動方程式になる，というのが目論見である。この際，式の数は減るので，得られる波動方程式はマクスウェル方程式全体を満足するための必要条件である。十分条件ではないことには留意しておかなければならない。

まず，式(12–2)の両辺の rot をとり，座標による偏微分と時間による偏微分の順序を変えると，

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \tag{12–5}$$

となる。この式の右辺の rot$\boldsymbol{H}$ に式(12–1)を代入すると，

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} \tag{12–6}$$

を得る。ここで，ベクトル解析の一般的な公式（証明はすぐ後で説明する）：

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{12–7}$$

と，式(12–3)を用いると，

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=0 \tag{12–8}$$

が導かれる。すなわち，波動方程式が得られた。

ベクトル解析の表記に慣れている人にはこれで十分かとは思うが，慣れていない人のために，式(12–7)の証明と，ベクトル場に作用するラプラシアン∇^2（通常のラプラシアン∇^2はスカラー場に作用する）について，成分表示で説明を加えておく。定義により，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\\[2ex]\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{12–9}$$

であるが，これに再度 rot を作用させると，

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_z-\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_y\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_x-\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_z\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_y-\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_x\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

波動光学の風景……12

14. 荷電粒子と光の相互作用

光を利用する装置にはミラーやレンズ，プリズム，フィルター等が使われる。すなわち，光をコントロールするために種々の物質が使われる。したがって，物質中での光の振舞いを知ることは重要である。ガラスも樹脂も電気的には中性に見える。しかし，電磁場と相互作用する以上，物質を構成する粒子の荷電粒子としての性質が，物質のマクロな光学的な特性を規定している。そこで，できるだけ単純なモデルで，物質と光の関わり方を考えてみたい。

図 14–1 に示すように，質量 m で電荷 q の荷電粒子が，バネ定数 k のバネで拘束され，速度に比例する抵抗力も受けるとする。光からは，その電場によって qE なる力を受けるものとする。

電場方向の変位を y とすると，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\kappa\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=qE(t) \qquad (14\text{–}1)$$

となる。ここで，抵抗力と速度の比を κ とした。

式(14–1)で特徴づけられる系は線形時不変なので，インパルスレスポンスを求めてみる。インパルスレスポンスの定義にしたがい，入力 $E(t)$がデルタ関数 $\delta(t)$であるときの解として出力 $y(t)$を求める。インパルス以前に応答はないので，$t<0$ では $y(t)=0$ である。また，$0<t$ では式(14–1)の右辺が 0 なので，インパルスレスポンスは

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\kappa\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=0 \qquad (14\text{–}2)$$

の解である。式(14–2)は，$y=\exp(\gamma t)$の形の解を仮定すると容易に解を求められる。すなわち，式(14–2)に $y=\exp(\gamma t)$を代入すると，

$$(m\gamma^2+\kappa\gamma+k)\exp(\gamma t)=0 \qquad (14\text{–}3)$$

となる。したがって 2 次方程式

$$m\gamma^2+\kappa\gamma+k=0 \qquad (14\text{–}4)$$

の 2 根を γ_1, γ_2 とすると，$y_1=\exp(\gamma_1 t)$，$y_2=\exp(\gamma_2 t)$ が解となり，それらの線形結合として一般解

$$y(t)=c_1\exp(\gamma_1 t)+c_2\exp(\gamma_2 t) \qquad (14\text{–}5)$$

が求まる。式(14–4)の解が重根となる場合は，

$$y(t)=(c_1 t+c_2)\exp(\gamma_1 t) \qquad (14\text{–}6)$$

が一般解となる。

インパルスレスポンス関数を求めるには，c_1，c_2 の値を決めなければならない。そのため，式(14–1)で $E(t)=\delta(t)$とおき，t について 0 を挟んだ微小領域について積分すると，

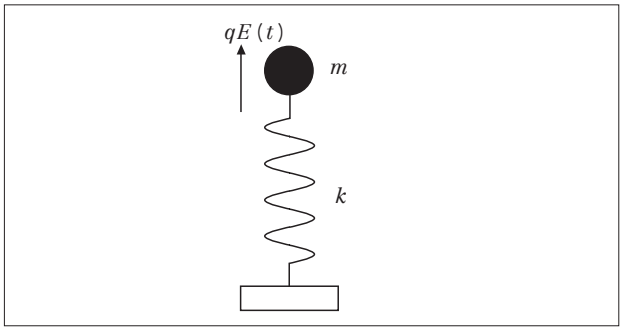

図 14–1　バネで拘束された荷電粒子のモデル

波動光学の風景……15

17. 誘電体

誘電体の構成粒子は電場が印加されると分極する。分極とは，構成粒子の中の正電荷を持つ部分と，負電荷を持つ部分との相対位置がずれることである。構成粒子が分極するミクロな機構の特性と，物質のマクロな特性を特徴付ける誘電率 ε との関係を，単純な古典力学的モデルで考え，Lorentz–Lorenz の式などを導く。

誘電体の構成粒子のモデルを**図 17–1** に示す。正電荷とその周りに拘束された電子からなる等方的なモデルで考える。電場が印加されていないときは，図の(a)のように，中心部にある重い正電荷の粒子の周りを電子雲が取り巻いている。電場 $\boldsymbol{E}'$ が印加されると，図の(b)のように，重い正電荷はほとんど動かないが，軽い電子は容易に移動して変位 $\boldsymbol{r}$ が生ずる。

電子の変位 $\boldsymbol{r}$ に対する運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+\kappa\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+k\boldsymbol{r}=-e\boldsymbol{E}'(t) \qquad (17\text{–}1)$$

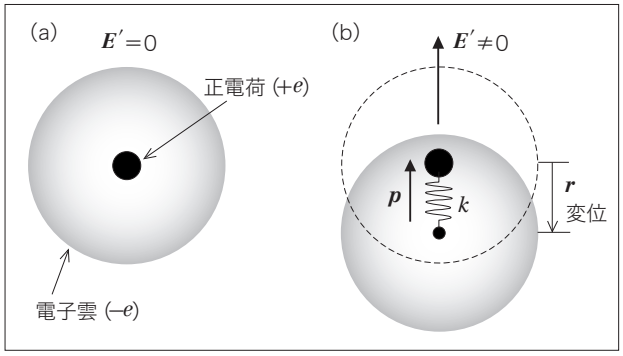

図 17–1　分極する物質粒子のモデル
(a)電場印加前，(b)電場印加後

となる。ただし，m は電子の質量，k は拘束力のバネ定数，また，電子には速度に比例する抵抗力が働くとして，その比例係数を κ とした。このとき，この物質粒子に誘起される双極子モーメントは $\boldsymbol{p}=-e\boldsymbol{r}$ となるので，式(17–1)から $\boldsymbol{p}$ の満たす微分方程式を導くと，

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t^2}+\kappa\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}+k\boldsymbol{p}=e^2\boldsymbol{E}'(t) \qquad (17\text{–}2)$$

となる。ここで，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{E}'$ に対する応答と見たときの周波数応答関数は，時間発展を表す因子を $\exp(-i\omega t)$ として求められる。すなわち，

$$\boldsymbol{E}'(t)=\boldsymbol{E}'_\omega\exp(-i\omega t) \qquad (17\text{–}3)$$

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}_\omega\exp(-i\omega t) \qquad (17\text{–}4)$$

と置くと，式(17–2)から，

$$\begin{aligned}&(-m\omega^2\boldsymbol{p}_\omega-i\kappa\omega\boldsymbol{p}_\omega+k\boldsymbol{p}_\omega)\exp(-i\omega t)\\&=e^2\boldsymbol{E}'_\omega\exp(-i\omega t)\end{aligned} \qquad (17\text{–}5)$$

となり，周波数応答関数 $\alpha(\omega)$ は

$$\alpha(\omega)=\frac{\boldsymbol{p}_\omega}{\boldsymbol{E}'_\omega}=\frac{e^2}{-m\omega^2-i\kappa\omega+k} \qquad (17\text{–}6)$$

となる。これが一粒子の分極率である。ここで，もし抵抗力がない($\kappa=0$)とすると，$\omega^2=k/m$ のときに $|\alpha|\to\infty$ となる。この周波数は共鳴周波数と呼ばれる。

次に，一粒子の分極率と誘電率の関係を考える。こ

索　引

■ 事項

	頁	カラム	行
一粒子の分極率	11	右	下 4
一粒子の分極率	24	右	下 4
因果律	7	右	下 1
インパルスレスポンス	6	左	下 7
インパルスレスポンス	10	左	下 9
円偏光	5	左	9
荷電粒子	10	左	6
カナルフィールド	27	左	下 4
環電流	16	右	6
ギャップフィールド	27	左	下 4
金属	28	右	5
屈折率	21	右	22
クラウジウス･モソッティの式	25	左	下 3
クラマース･クローニッヒの関係	7	右	下 2
クラマース･クローニッヒの関係	18	右	10
コンボリューション	7	左	16
磁化	14	右	16
磁化	16	左	下 2
磁化電流	17	左	13
磁気モーメント	16	左	下 3
時不変	6	左	14
自由電子	28	左	3
周波数応答関数	7	左	下 7
周波数応答関数	11	右	下 3
消衰係数	21	右	23
真空の特性インピーダンス	3	右	下 12
真電荷	15	左	6
真電流	17	左	下 7
積分の主値	8	右	13
線形	6	左	9
線形応答システム	6	左	5
双極子モーメント	11	右	下 10
双極子モーメント	14	右	下 8
畳み込み積分	7	左	17
直線偏光	4	左	下 4
デルタ関数	6	左	下 5
デルタ関数	10	左	下 8
電気感受率	17	右	下 7
電気伝導率	28	右	8
伝導電流	17	左	下 6
透磁率	18	左	6
波数	2	右	下 5
波動方程式	2	左	14
比誘電率	21	左	8
フーリエ変換	7	左	下 3
フーリエ変換	19	左	10
複素屈折率	21	左	9
物質中のマクスウェル方程式	17	右	5
プラズマ周波数	12	右	10
プラズマ周波数	30	左	下 5
分極	14	右	16
分極	14	右	下 2
分極	15	右	11
分極電荷	15	左	3
分極電流	16	左	下 15
ヘルムホルツ方程式	20	右	下 11
マクスウェル方程式	19	左	1
誘電体	14	右	下 7
誘電体	24	左	7
誘電率	17	右	下 4
ローレンツ場	26	左	15
ローレンツ場	27	右	8
ローレンツ･ローレンツの式	25	右	4

索　引

■ 人名

	頁	カラム	行
Ampère	9	人物	13
Biot	9	人物	12
Cauchy	9	人物	1
Champollion	13	人物	下 3
Clausius	25	左	下 3
Drude	31	人物	1
Fourier	13	人物	1
Heaviside	18	人物	1
Helmholtz	5	人物	10
Helmholtz	23	人物	2
Hertz	5	人物	1
Hertz	23	人物	下 2
Kirchhoff	5	人物	9
Lagrange	9	人物	8
Laplace	9	人物	8
Lorentz	25	右	5
Lorentz	27	人物	1
Lorenz	25	右	5
Michelson	23	人物	下 1
Michelson	27	人物	下 4
Morley	27	人物	下 3
Mossotti	25	左	下 2
Planck	23	人物	下 1
Voigt	30	人物	9
Weierstraß	9	人物	下 2
Wheatstone	18	人物	9
Wien	23	人物	下 1
Zeeman	27	人物	下 5

■ 記号

	頁	カラム	行
∇^2	1	右	7

著者略歴

本宮佳典（ほんぐう・よしのり）, Yoshinori Hongu

1956年 神奈川県藤沢市生まれ
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業
1979年 東京大学理学部物理学科卒業
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士
同年，株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー
2018年 株式会社東芝 研究開発センター（2021.10退職）
法政大学理工学部（兼任講師）（2018.4〜）

第20回（2019年度）応用物理学会業績賞（教育業績）受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/

波動光学の風景　媒質編

2013年1月25日初版発行
2023年2月1日第2版発行

著　者　　本　宮　　佳　典
発行者　　喜　多　　野乃子
発行所　　アドコム・メディア株式会社
〒169-0073　東京都新宿区百人町2-21-27
電話　(03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2013
ISBN978-4-910636-10-8　C3042　¥2600E

© Yoshinori Hongu 2013

印刷/製本　㈱ブックフロント
Printed in Japan

・本書に掲載する著作物の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権（送信可能化権を含む）はアドコム・メディア㈱が保有します。
・ JCOPY ＜出版者著作権管理機構 委託出版物＞
本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088，FAX 03-5244-5089，E-mail info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。