

波動光学の風景

回折編（2）

本宮佳典 著

試し読み



Advanced Communication Media
アドコム・メディア株式会社

この電子書籍は、月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の、2011 年 3 月号から 2012 年 3 月号までに掲載された分をまとめたものである。既刊の回折編 (1) で紹介したスカラー波の回折モデルの基本的な応用例や、具体的な計算に役立つ考え方、計算手法などを紹介する。

回折によって十分遠方で得られる光の場は、フラウンホーファー回折によって定式化され、フーリエ変換の計算で求められる。その例として、円形開口や矩形開口、周期的なスリット列などで回折される光の分布を計算する。

数式や計算については、一般的な文献より少し丁寧に説明した。例えば円形開口による回折では、ベッセル関数の公式について予備知識がなくても理解できるよう、べき級数の形で解を導く方法を説明した。そのため、強度分布の図を描くための簡単な計算プログラムを紹介することもできた。読み飛ばしていただいても問題ないが、もし楽しんでいただければ、ベッセル関数に親しみを感じられるようになるかもしれない。

スリット列は周期構造の代表的な例で、回折格子の作用を理解する基礎になる。また、光ディスクの再生原理などを理解する参考にもなる。フーリエ変換の諸性質を活用すると見通しがよいので、第 73 章ではフーリエ変換の諸性質の導出を簡単にまとめた。

遠方から少し近づくと、フレネル回折の領域になる。ナイフエッジによる回折で現れるコルニユの螺旋が自

動車で走りやすいカーブの形状と同じであるなど、興味深い話題も登場する。何を前提にどういう考え方をして何を導くかというような、話の流れを意識すると、回折現象やそれを扱う数理モデルの要点を理解しやすくなり、適用限界なども判断しやすくなると思う。

計算の効率や精度などを考えると、高速フーリエ変換やサンプリング定理の知識が重要になることもある。計算の目的に応じてモデルやアルゴリズムを的確に選択し、数値計算の分割幅等のパラメーターを的確に設定するためには、系とモデルの関係をよく把握することが重要である。第 81 章では、効率や精度も意識しつつ、開口付近での回折の影響を眺めてみた。

最後の第 82 章では境界回折波を紹介した。これは、一般的な教科書ではあまり紹介されていないが、回折現象を理解する上では興味深い視点である。回折積分が開口面全体にわたる積分で与えられるにもかかわらず、回折の効果は主に開口の辺縁部による。このことが数式的にも見えて来る。境界回折波については、東京工芸大学の渋谷真人教授から、記事のテーマの候補としてご教示いただいた。氏には拙著記事全般に亘り、内容にも表現にも貴重なご示唆をいただいている。ここで改めて心より感謝申し上げる。

回折は現象としての態様も多様であり、それを扱う数理モデルや計算技法も多彩である。それらも含めて、読者の関心や興味の広がりによって本書が少しでも役にたてば、著者として何よりの喜びである。

第 68 回	70. 座標の正規化
第 69 回	71. 円形開口の回折像
第 70 回	72. 矩形開口の回折像
第 71 回	73. フーリエ変換
第 72 回	74. スリット列の回折像
第 73 回	75. 光ディスクの信号再生
第 74 回	76. コルニユの螺旋
第 75 回	77. 焦点前後の場
第 76 回	78. 高速フーリエ変換
第 77 回	79. FFT による回折計算
第 78 回	80. サンプリング定理
第 79 回	81. 平面波展開による回折計算
第 80 回	82. 境界回折波

波動光学の風景……◆68

70. 座標の正規化

フラウンホーファー回折は、実質的にフーリエ変換の形で定式化されることを見てきた。ここでは座標を適当に正規化（規格化ともいう）して、一般的なフーリエ変換の公式を使いやすい表式を導く。座標の正規化は、物理的に新しい内容（法則）を含むものではない。その意味では、計算の便利のための技巧に過ぎない。しかし、正規化によって、見かけの異なる現象を統一的に理解しやすくなることもある。その意味では物理的なものの見

方が一歩進むように感じられると思うし、役に立つことも多い。

図 70-1 と図 70-2 の光学系を考える。いずれも開口の形成された遮光板に波長 λ のレーザー光が照射され、開口内部での光の振幅や位相の変化は緩やかであるとする。図 70-1 では小さな開口を通過した光の遠方での強度分布を考える。また、図 70-2 では、焦点距離 $f = z_2$ の集光レンズの焦点面での強度分布を考える。

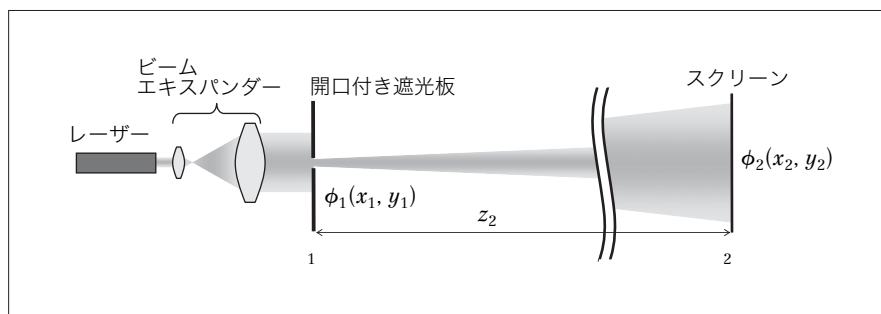


図 70-1 微小開口による遠方の回折像

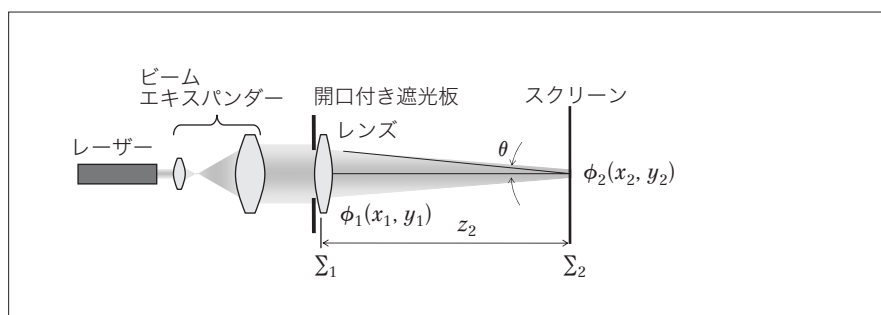
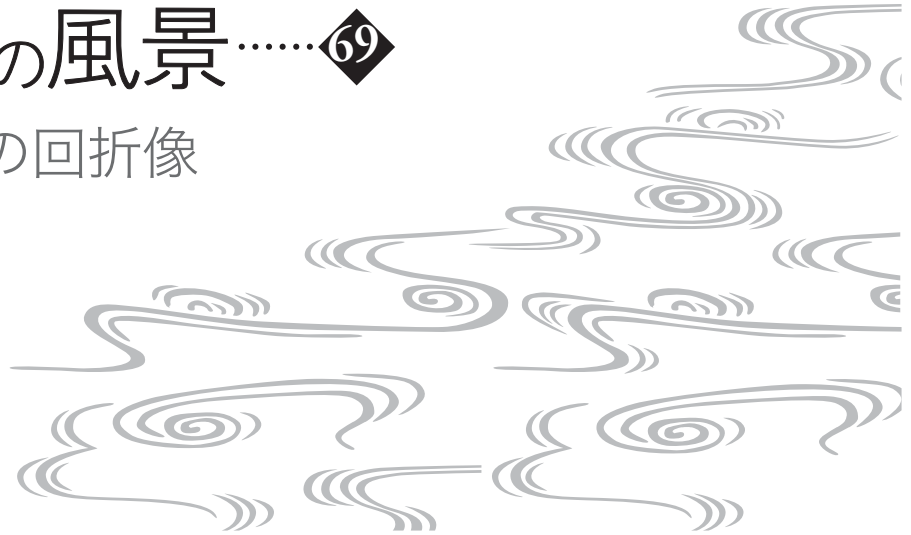


図 70-2 レンズ開口による焦点位置での回折像

波動光学の風景……◆69

71. 円形開口の回折像



微小な円形開口を通った平面波が遠方で形成する回折パターンを、フラウンホーファー回折のモデルで求めてみよう。前章で紹介したように、レンズで集光した光が焦点面に形成する回折パターンも同様に扱うことができる。図 71-1 に光学系を示す。均一なレーザー光を半径 a の円形開口の形成された遮光板に照射する。開口を通過した光が十分遠方のスクリーンに作る明暗パターンを考える。開口中心を原点として光軸の方向を z 軸、遮光板の開口面内に x_1, y_1 軸をとる。スクリーンまでの距離を z_2 とし、スクリーン面内の座標は x_1, y_1 軸とそれぞれ平行に x_2, y_2 軸をとる。

フラウンホーファー回折の表式は、波長を λ とすると、

$$\begin{aligned} \phi_2(x_2, y_2) &= \frac{1}{i\lambda z_2} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} z_2\right) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_2} (x_2^2 + y_2^2)\right] \\ &\times \iint \phi_1(x_1, y_1) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z_2} (x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (71-1)$$

[第 69 章, 式(69-4)参照] と書ける。ただし、フラウンホーファー回折が妥当なモデルであるための条件として、

$$\frac{a^2}{\lambda} \ll z_2 \quad (71-2)$$

が満たされているとする [第 69 章, 式(69-2)参照]。

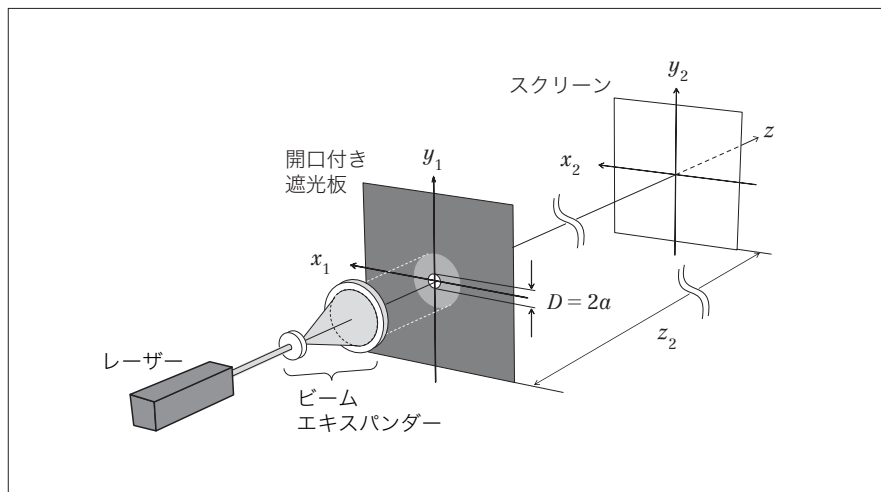
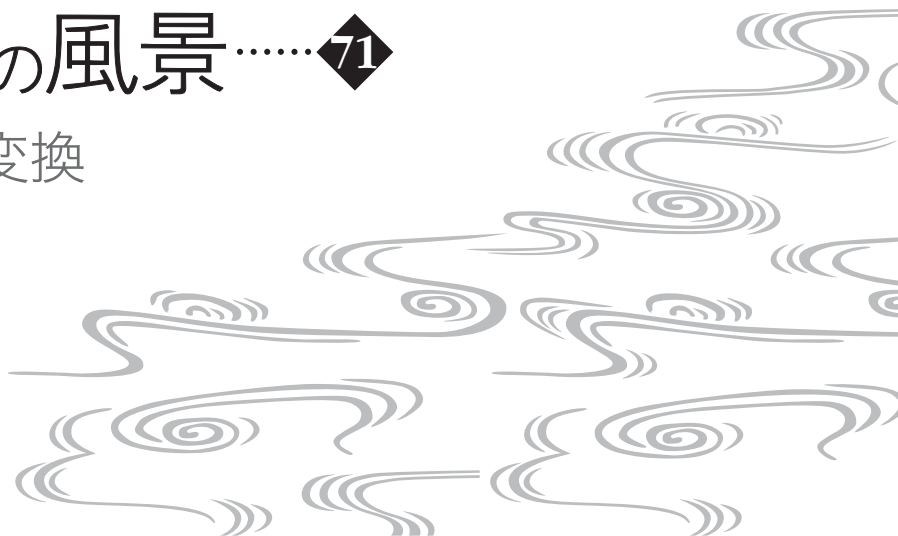


図 71-1 開口面の座標 (x_1, y_1) とスクリーン面の座標 (x_2, y_2)

波動光学の風景……71

73. フーリエ変換



フラウンホーファー回折の式がフーリエ変換の形になることから、フーリエ変換の公式を活用することで見通しよく回折像を求められる場合も多い。フーリエ変換は既に何回か使ってきたが、今後も使うので、よく使う公式も含めて簡単に紹介する。

周期 2π の関数のフーリエ級数展開

周期 2π を有する、ある程度性質の良い関数はフーリエ級数展開（フーリエ展開）できて、

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \quad (73-1)$$

と表すことができる。ここでは複素関数のローラン展開に基礎を置いて、フーリエ級数展開が可能であることを説明する。これは、必要以上に性質の良い関数の場合の説明になるが、現実の電磁場は十分に性質の良い関数と考えられるので、十分実際的な説明と考えられる。

式(73-1)で、

$$z = \exp(ix) \quad (73-2)$$

と置いて、式(73-1)の右辺を z の関数と見ると、

$$g(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m \quad (73-3)$$

と書ける。これを複素関数のローラン展開の表式と見る（補足参照）。

変数 x が実軸上を動くとき、式(73-2)で定義される z は、複素平面の原点を中心とした単位円の円周上を動く。関数 $g(z)$ がその単位円の円周近傍で正則であれば、そ

の領域でローラン展開できる。その際の展開係数は、単位円の円周を積分経路 C として、

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) z^{-m-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{ix}) e^{-i(m+1)x} i e^{ix} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx \end{aligned} \quad (73-4)$$

のように求まる。したがって、式(73-1)のフーリエ展開係数 a_m は式(73-4)で定まる。このように、関数 $f(x)$ を単位円周上の $g(z)$ の値として見ると、フーリエ展開とローラン展開が対応する。

周期 L の関数のフーリエ級数展開

周期 L を有する関数 $f(x)$ のフーリエ展開を考える。周期が L の関数 $f(x)$ に対して

$$x = \frac{L}{2\pi} x' \quad (73-5)$$

と置くと、 $f(Lx'/2\pi)$ は x' の関数として周期が 2π である。そこで式(73-1)を適用すれば

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{L}{2\pi} x'\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx'} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left(\frac{2\pi i}{L} mx\right) \end{aligned} \quad (73-6)$$

と展開することができる。展開係数 a_m は

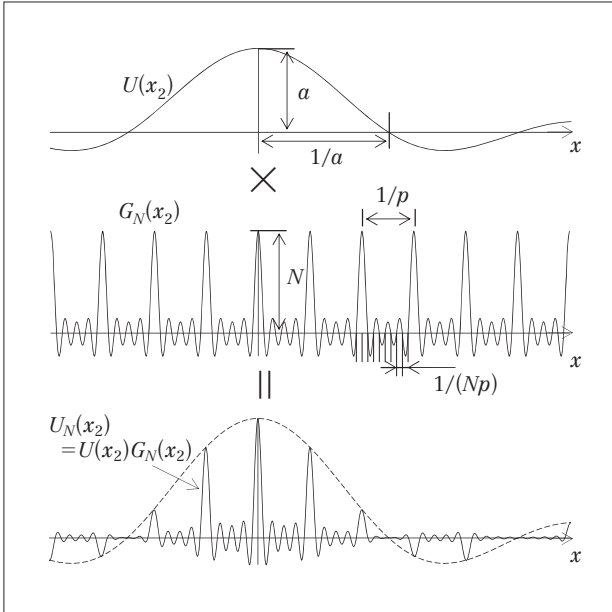


図 74-4 関数 $U(x_2)$, $G_N(x_2)$ および $U_N(x_2)$ の関数形 ($a = 0.4$, $N = 9$)

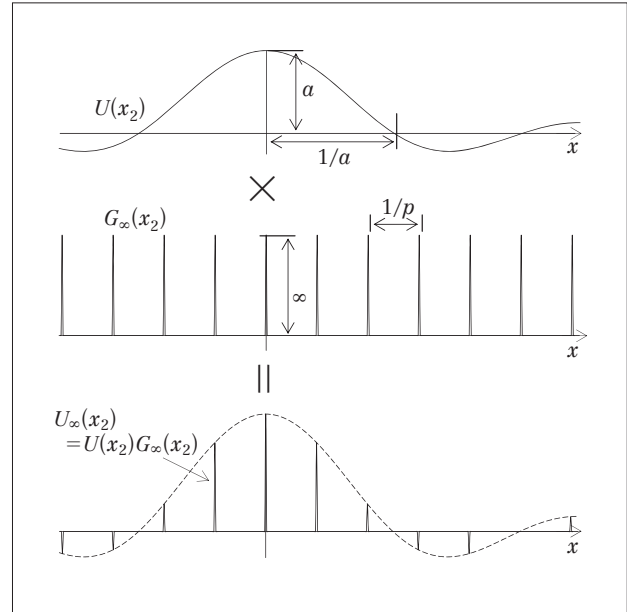


図 74-6 関数 $U(x_2)$, $G_\infty(x_2)$ および $U_\infty(x_2)$ の関数形 ($a = 0.4$, p は関数は係数に比例した高さでイメージを示した。)

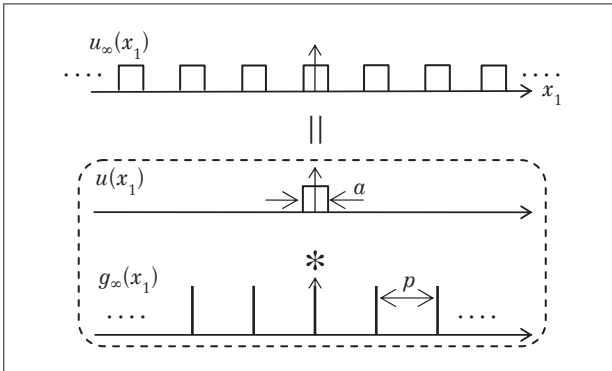


図 74-5 単一開口の場合 $u(x_1)$ と無限個の δ 関数列の畳込み積分

(2) 積のフーリエ変換

積として表す準備として、開口が周期 p で無限に並ぶ状況を考える。図 74-5 に示すように、式(74-16)の関数 $u(x_1)$ と無限個の δ 関数の並び

$$g_\infty(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mp) \quad (74-23)$$

とのコンボリューションとして、

$$u_\infty(x_1) = u(x_1) * g_\infty(x_1) \quad (74-24)$$

と書ける。そこで「コンボリューションのフーリエ変換は、フーリエ変換の積」の公式を使う。関数 $u(x_1)$ の

フーリエ変換は、式(74-20)の $U(x_2)$ である。また、式(74-23)の周期的デルタ関数列 $g_\infty(x_1)$ のフーリエ変換は、

$$G_\infty(x_2) = \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(x_2 - \frac{m}{p}\right) \quad (74-25)$$

である [第 73 章、式(73-34)を参照]。したがって、 $u_\infty(x_1)$ のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} U_\infty(x_2) &= a \operatorname{sinc}(\pi a x_2) \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(x_2 - \frac{m}{p}\right) \\ &= \frac{a}{p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\pi a \frac{m}{p}\right) \delta\left(x_2 - \frac{m}{p}\right) \end{aligned} \quad (74-26)$$

となる。図 74-6 に関数 $U(x_2)$, $G_\infty(x_2)$ および $U_\infty(x_2)$ の概形の例を示した。これで準備は整った。

第 2 の方法では、関数 $u_N(x_1)$ を、有限開口の無限列の場合と、幅 c の窓関数

$$w(x_1) = \begin{cases} 1 & (-c/2 \leq x_1 \leq c/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (74-27)$$

との積として、

$$u_N(x_1) = u_\infty\left(x_1 - \frac{N+1}{2}p\right) w(x_1) \quad (74-28)$$

波動光学の風景……73

75. 光ディスクの信号再生

光ディスク装置では、レーザー光を対物レンズで微小な光スポットに絞り込んで、光ディスク記録面上の情報にアクセスする。レーザー光は、情報信号の検出と共に、焦点誤差信号やトラッキング誤差信号の検出に使われる。記録機能のある装置ではこれらに加え、記録や消去のためのエネルギー供給の機能もレーザー光が担う。

高い記録密度を達成するために、レーザー光は幾何光学的にはほぼ理想的な光学系で集光される。このような系の集光点近傍の光の状態は、回折現象として見る事ができる。本章では周期的に並んだマークに対する再生信号の計算を紹介する。フーリエ変換の性質を活かすと効率的に計算できる。光ディスクに限らず、走査光学系を理解する上でも参考になると思う。

図 75-1 に光ディスクの光学系を模式的に示した。半

導体レーザーを出た光は対物レンズの作用により、光ディスク基板を介して記録面に集光される。記録面で反射した光は同じ対物レンズを逆向きに進み、ビームスプリッターで光路が分離されて光検出器に導かれる。記録面上のマークによって光が回折されるので、光検出器に至る光の強度はディスクの回転に伴って変化する。これが再生信号である。具体的なマークの構造は、光ディスクの種類によって異なる。再生専用形ディスクの場合は、射出成形時にスタンパーによって形成される微小な起伏で、ピットとも呼ばれる。記録形ディスクの場合は、記録材料層が光の照射によって局所的に変質した部分である。通常、長寿命化のための保護層や、光学的に信号を増強するための干渉層を含む多層構造になっている。

再生特性は、対物レンズの開口面(x_1, y_1)の場と記録

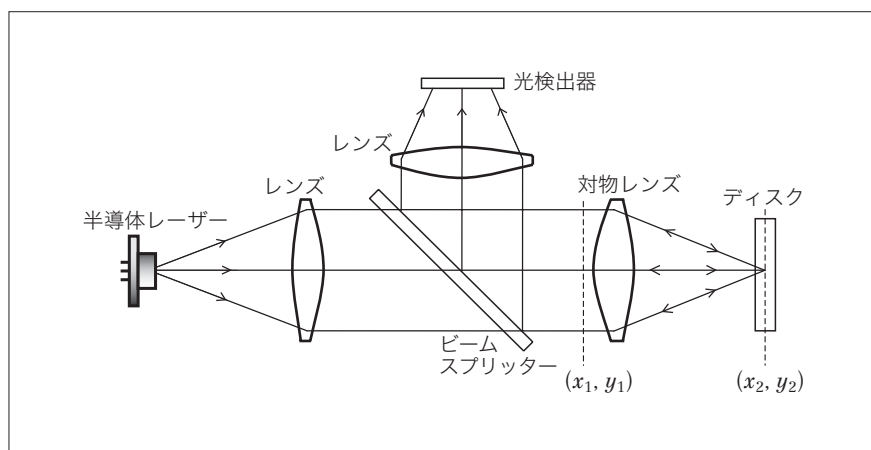


図 75-1 光ディスク装置の光学系の模式図

に比例する。

式(76-15)の2乗和の形の因子の形を見ると、2点 $(C(-\infty), S(-\infty))$ と $(C(p), S(p))$ の距離の2乗と解釈できる。そこで、横軸に $C(p)$ 、縦軸に $S(p)$ をとり、 p を媒介変数として曲線を作図したものが、**図 76-3** である。この図形はコルニュの螺旋 (Cornu spiral)、クロソイド曲線 (clothoid curve)、オイラーの螺旋 (Euler spiral)

などと呼ばれる (補足 2 参照)。この曲線の $p \rightarrow -\infty$ とした極限の点 $(-1/2, -1/2)$ と、 p に対応する曲線上の点を結んだ線分の長さの2乗が、その p に対応する座標値 y_2 における強度に比例する。パラメーター p と強度の関係をあらかためてプロットしたものが、**図 76-4** である。

なお、式(76-15)から分かるように、

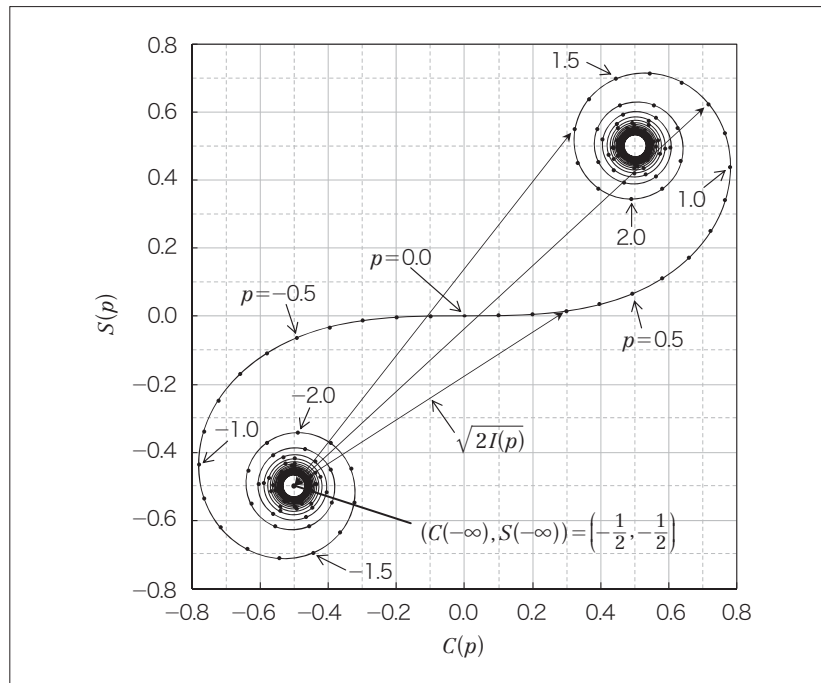


図 76-3 コルニュの螺旋

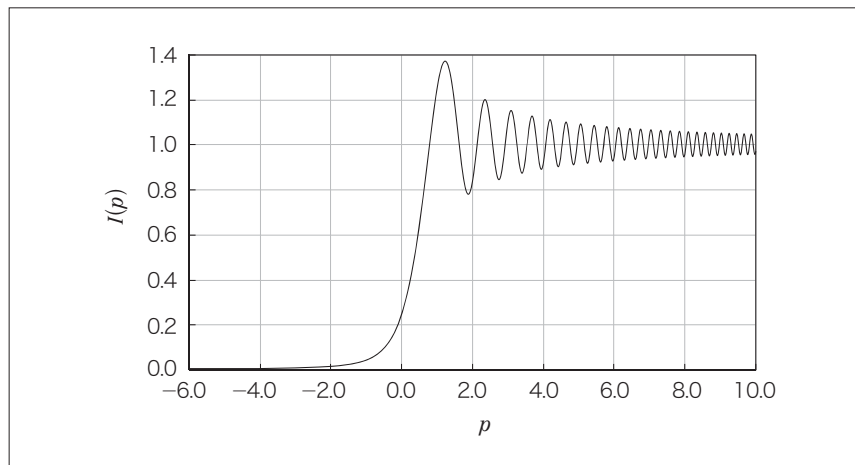


図 76-4 ナイフエッジにより回折された光の強度分布

波動光学の風景……◆76

78. 高速フーリエ変換

回折計算でフーリエ変換をする場面は多い。しかし、解析的にフーリエ変換できる場合ばかりではなく、計算機で数値的に計算することが多い。フーリエ変換は積分の形なので、数値積分で求める方法がある。一方、FFT（高速フーリエ変換：fast Fourier transform）と呼ばれる高速のアルゴリズムがある。入力データに対する制約条件があるため、状況によってはFFTの適用が困難だったり、不適当な場合もある。しかし、適用できる場合には効率的に計算できるので、広く用いられている。

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i \xi x) dx \quad (78-1)$$

とすると、逆フーリエ変換は

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp(2\pi i \xi x) d\xi \quad (78-2)$$

となる [必要なら第 73 章, 式(73-10), (73-11)参照]。

関数 $f(x)$ としては x の有限区間でのみ 0 でない値をとるような関数を考え、図 78-1 に示したように、間隔 Δ でサンプルした N 個のサンプル点 $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ における $f(x)$ の値 $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ で与えられるものとする。すなわち、

$$x_n = x_0 + n\Delta \quad (78-3)$$

$$f_n = f(x_n) \quad (78-4)$$

($n = 0, 1, \dots, N-1$) で関数 $f(x)$ が代表されるものとする。

このとき、関数 $f(x)$ のフーリエ変換は、式(78-1)を求める数値積分として

$$\begin{aligned} F(\xi) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-2\pi i \xi x_n) \Delta \\ &= \Delta \exp(-2\pi i \xi x_0) \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-2\pi i \xi n \Delta) \end{aligned} \quad (78-5)$$

のように近似できる。

一般に、有限長の信号列 $x(n)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) に対して、信号列

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-2\pi i \frac{kn}{N}\right) \quad (78-6)$$

($k = 0, 1, \dots, N-1$) は有限長の DFT（離散フーリエ変換：discrete Fourier transform）と呼ばれる。FFT は、DFT を求めるのに際して、式(78-6)の通りに計算する

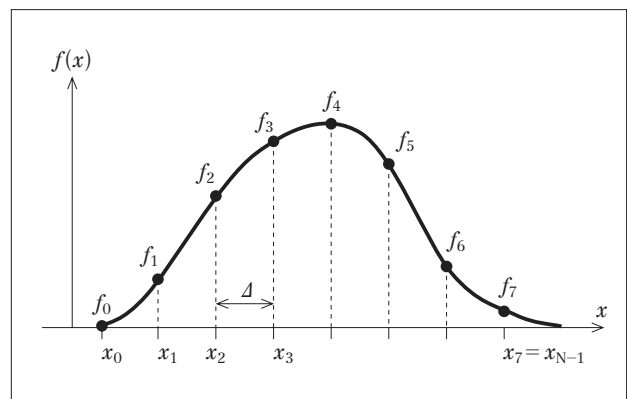


図 78-1 関数 $f(x)$ のサンプル値 ($N=8$)

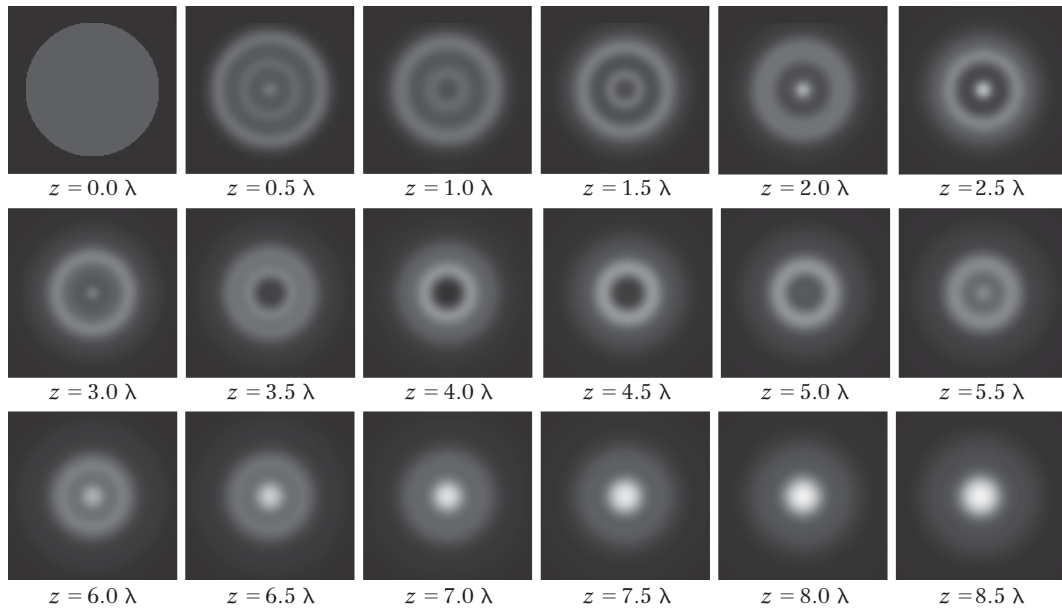


図 81-4 平面波展開で FFT により計算した、円形開口による回折像
($\lambda = 20$ 節点, 開口半径 = 3λ , $N = 1024$, 一辺 = 151 節点)

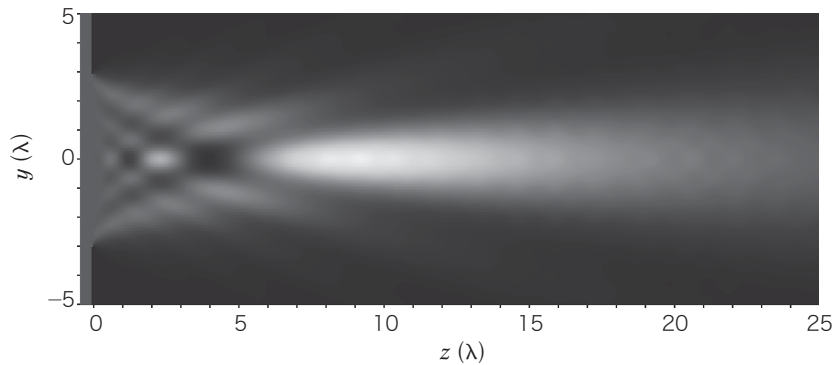


図 81-5 平面波展開で FFT により計算した、円形開口による回折像強度分布
($\lambda = 20$ 節点, 開口半径 = 3λ , $N = 1024$)

遮光板の背後の強度変動を見やすくするため、強度と画素値（明度）の関係は図 81-4、81-5 と同じではない。中心軸上では周囲から回り込む光が同位相で強め合い、輝点が生ずる。これはポアソンの輝点、あるいはアラゴスポットなどと呼ばれる現象である^{1)~9)}。光の波動説の成立過程で、歴史的に大きな役割を果たした^{1),3)~4)}。図は、通常の実験のスケール（直径数ミリ～十数ミリ）と比べると非常に小さい円板での計算例だが、円板からの距離にあまり依存せずに輝点が観測できるなど、ポアソンの輝点の特徴はしっかり現れている。

なお、波の重ね合わせの原理（波動方程式の線形性）の直接の帰結であるが、円形開口のときと円形遮光のときの両方の場の振幅を足せば、一様な平面波が伝搬する状況と同じ場になる。

（余談）

開口内の入射光の場が与えられたときに、遠方での強度分布を求めることを考えてみる。フラウンホーファー回折として求める場合、入射光の場に対してフーリエ変換を施して求める。これに対し、平面波の重畳によって

■ 事項

	頁	カラム	行		頁	カラム	行
アラゴスポット	72	左	4	周波数間引きアルゴリズム	53	右	下 7
エアリーパターン	9	右	2	焦点	47	右	1
NA	4	右	2	焦点距離	47	左	下 3
FFT	52	左	4	sinc 関数	14	左	下 6
円形開口	6	左	1	スリット列	28	左	1
円形の遮光板	71	右	下 2	正規化	1	左	3
円弧の長さ	20	左	5	正弦条件	47	左	下 2
円柱関数	8	左	下 6	相関関数	22	右	下 8
オイラーの螺旋	43	左	7	第 1 種ベッセル関数	11	右	下 6
開口数	4	右	1	たたみこみ	22	左	下 6
開口数	35	右	7	DFT	52	右	下 3
ガンマ関数	11	右	下 4	停留位相法	74	左	10
規格化	5	左	下 9	デフォーカス	47	左	6
逆フーリエ変換	22	左	下 9	デルタ関数	23	右	下 3
境界回折波	80	左	下 13	ナイフエッジ	41	左	1
矩形開口	13	左	4	ニュートンの公式	51	右	3
矩形窓関数	24	右	13	パーセバルの定理	14	右	下 11
くし型関数	24	左	6	パーセバルの定理	23	左	下 6
グループ	37	右	1	バタフライ演算	56	左	6
クロソイド曲線	43	左	6	バタフライダイヤグラム	56	左	7
高速フーリエ変換	52	左	5	光ディスク	34	左	1
コーシーの積分公式	25	右	3	ピット	37	右	6
コーシーの積分定理	25	左	下 2	ビット反転	56	左	11
コリレーション	22	右	下 8	標準化	5	左	下 6
コルニュの螺旋	43	左	6	標本化	64	左	12
コンボリューション	22	左	下 6	フーリエ級数展開	21	左	7
サンプリング	64	左	11	フーリエ変換	22	左	下 9
サンプリング定理	64	右	3	フーリエ変換の公式	21	左	2
サンプリング定理	71	左	3	フレネル回折	41	左	2
時間間引きアルゴリズム	57	右	下 11	フレネル数	7	左	1
周期的デルタ関数	24	左	4	フレネル積分	42	左	下 1

索引

■ 事項

	頁	カラム	行
ベッセル関数	8	左	8
ポアソンの輝点	72	左	4
マーク	37	右	2
余弦定理	78	右	下 9
離散フーリエ変換	52	右	下 3
量子化	64	左	13
レンズ	47	左	1
ローラン展開	21	左	10

■ 人名

	頁	カラム	行
Adams	5	人物	下 4
Airy	5	人物	1
al-Khwārizmī	59	人物	1
al-Ma'mun	59	人物	14
Babinet	40	人物	1
Bernoulli, D	12	人物	下 3
Bernoulli, J	12	人物	下 3
Bessel	12	人物	1
Binet	40	人物	8
Cavendish	46	人物	9
Cooley	57	右	14
Cornu	46	人物	1
Cunningham	27	人物	下 9
Dirac	23	右	下 2
Dirac	27	人物	1
Euler	12	人物	下 2
Faraday	74	人物	下 2
Feynman	27	人物	下 3
Fizeau	46	人物	12
Fourier	74	人物	19
Fowler	27	人物	下 8
Frederick William III	12	人物	下 7
Gauss	12	人物	下 5
Gauss	57	右	15
Lagrange	12	人物	下 2
Lagrange	74	人物	17
Laplace	74	人物	17
Nyquist	66	左	6
Olbers	12	人物	下 9
Parseval	23	左	下 5
Poisson	74	人物	1
Shannon	66	左	7
Tukey	57	右	14

著者略歴

本宮佳典 (ほんぐう・よしのり), Yoshinori Hongu



1956年 神奈川県藤沢市生まれ
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業
1979年 東京大学理学部物理学科卒業
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士
同年、株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー
2018年 株式会社東芝 研究開発センター (2021.10退職)
法政大学理工学部 (兼任講師) (2018.4～)

第20回 (2019年度) 応用物理学会業績賞 (教育業績) 受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。 <https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/>

波動光学の風景 回折編 (2)

2014年3月25日初版発行

2023年2月1日第2版発行

著者 本宮 佳典
発行者 喜多 野乃子
発行所 アドコム・メディア株式会社

〒169-0073 東京都新宿区百人町2-21-27
電話 (03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2014

ISBN 978-4-910636-16-0 C3042 ¥4800E

© Yoshinori Hongu 2014

印刷/製本 ㈱ブックフロント

Printed in Japan

・本書に掲載する著作物の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権
(送信可能化権を含む) はアドコム・メディア㈱が保有します。

・**JCOPY** <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、
出版者著作権管理機構 (電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, E-mail info@jcopy.or.jp) の
許諾を得てください。