波動光学の風景

結晶編（2）

本宮佳典 著

試し読み

Advanced Communication Media
アドコム・メディア株式会社

はじめに

この電子書籍は，月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の，2017 年 6 月号から 2018 年 9・10 月号までに掲載された分をまとめたものである。本編では結晶光学の基礎として，異方性のある透明媒質中を伝搬する平面波の挙動を考える。

既刊の結晶編（1）では，結晶の微視的な構造に見られる対称性と，材料としての巨視的な電磁気的特性の関係について紹介した。結晶に限らず液晶などの媒質でも，同様の特性が与えられれば，巨視的な光の挙動を扱うことができる。

本編では結晶光学の基本的な概念に慣れることを主眼として，吸収も旋光性もない単純な特性の媒質を想定する。すなわち，誘電率テンソルは実対称行列で表現できるものとし，透磁率はμ_0と見なせるものとし，振動磁化は誘起されないものとした。また，光の場については一様な平面波を考える。すなわち，媒質に非等方性を導入すること以外は，できるだけ単純な状況を想定した。それでも，エネルギーの流れが波面の法線方向にはならないなど等方媒質とは異なる特徴的な現象が現れ，それを扱うための諸概念が必要となる。

結晶光学では，波数（波動）ベクトル面，屈折率面，光線速度面，法線速度面，屈折率楕円体など，一見複雑な形状の曲面が種々使われる。そのため，これらに馴染みの薄い初学者が焦って習熟しようとしても，なかなか見通しの得られない場合もあるかと思われる。

しかしながら，本編で想定する単純な特性の媒質であれば，決して難解なものではない。基本的なことから順に理解して行けば，理解の範囲は確実に広がると思う。仮に理解できない部分が残っても，後で改めて落ち着いて眺めれば，理解できる範囲は次第に広がり，深まるに違いない。旅先の不案内な地でも，しばらく滞在すれば自由に歩ける範囲が少しずつ広がり，街の景観にも親しみが増すのと似ている。安易に苦手と決めつけないことだけでも心得て欲しい。

なお，因数分解やその他の式変形の過程などは，補足として極力示すようにした。しかし，あくまでも一例であって，他の導出法と比べて特段の優位性も必然性もないと思う。読者によってはもっと要領よく導ける方も多いと思う。また，要領に頼らず，基本的な方針に沿って愚直に導出できれば，それも素晴らしいことである。いずれにしろ，自力で先に進める方はそうしていただく方がよく，本書の導出過程に倣う必要はない。それでも，もし導出の多様な道筋の一つとして読者の参考になる部分があれば幸いである。

近年，液晶デバイスや偏光光学系，非線形光学，メタマテリアルなど，多くの領域で異方性のある光学材料が積極的に用いられている。また，樹脂製光学素子など，異方性に起因する複屈折を極力避ける分野であっても，コストと精度などの相反関係の中で最適な装置を実現するためには，複屈折の影響を十分に理解して設計することが必要になる。本編が結晶光学に関心をもつ読者の参考になれば大変幸いである。

2020 年 5 月　本宮佳典

目　次

波動光学の風景……124

126. 平面波と屈折率面

異方性のある物質でも，一様性（並進操作に対する不変性）があれば，並進操作に対する固有状態として，平面波の存在が予想される。特に，光学素子に用いられる材料には，磁化も吸収も円複屈折性も円二色性もないとみなせるものが多い。このように単純な材料に限っても，等方性の物質では見られない種々の現象が現れる。興味深くもあり，応用上も重要である。以下ではそのような材料の中で，どのような平面波が存在できるのかを見て行く。なお，単色光を考え，$\exp(-i\omega t)$ を時間因子とする複素振幅で電磁場を表す。

まず，考えている物質では，光の振動磁場によっても振動電場によっても磁化 $\boldsymbol{M}$ は誘起されず，

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \qquad (126\text{–}1)$$

が成り立つとする。このとき，振動磁場によって分極 $\boldsymbol{P}$ が生じることもない（第 122 章参照）。

電場 $\boldsymbol{E}$ によって誘起される分極 $\boldsymbol{P}$ は，電気感受率テンソル $\boldsymbol{\chi}$ を用いて

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{E} \qquad (126\text{–}2)$$

で与えられるものとする（線形性を仮定する）。このとき電束密度 $\boldsymbol{D}$ は，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E} \qquad (126\text{–}3)$$

で与えられる。ここで，誘電率テンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は $\boldsymbol{\chi}$ を用いて

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\chi} \qquad (126\text{–}4)$$

で与えられる（$\boldsymbol{I}$ は恒等テンソルで，単位行列で表される）。

空間座標 x, y, z 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を基底として場やテンソルを表すと，式(126–3) の $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}$ は

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad (126\text{–}5)$$

となる。

ここで，物質の対称性が，結晶点群の中の 19 種（$\mathrm{D_2}$, $\mathrm{C_{2v}}$, $\mathrm{D_{2h}}$, T, $\mathrm{T_h}$, O, $\mathrm{T_d}$, $\mathrm{O_h}$, $\mathrm{D_4}$, $\mathrm{C_{4v}}$, $\mathrm{D_{2d}}$, $\mathrm{D_{4h}}$, $\mathrm{D_3}$, $\mathrm{C_{3v}}$, $\mathrm{D_{3d}}$, $\mathrm{D_6}$, $\mathrm{C_{6v}}$, $\mathrm{D_{3h}}$, $\mathrm{D_{6h}}$）のいずれかであれば，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は直交行列により対角化可能である（第 123 章参照）。また，円二色性も円複屈折性もなければ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は対称行列であり（第 124 章参照），さらに，実部の行列と虚部の行列が交換可能であれば，直交行列により実部と虚部の同時対角化が可能である（第 125 章参照）。そこで，その直交行列を構成する 3 つの列ベクトルを基底ベクトルとすれば，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は対角行列となる。その 3 つの基底ベクトルの方向を改めて x, y, z 軸とすれば，式(126–5) は

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad (126\text{–}6)$$

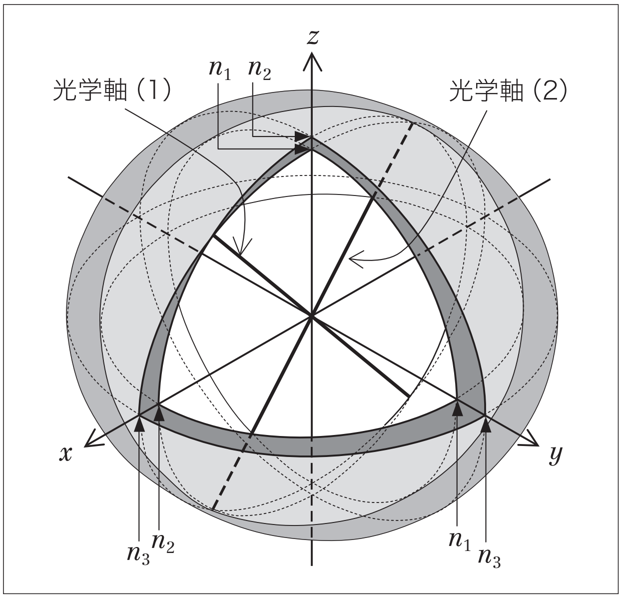

図 126–2　二軸結晶の屈折率面

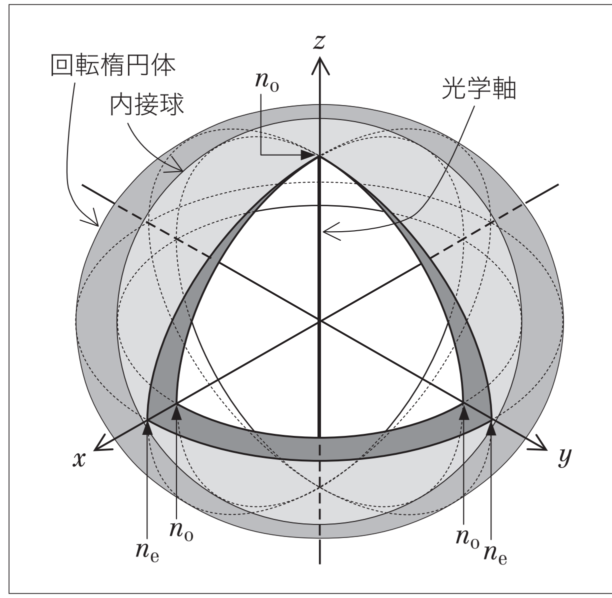

図 126–3　一軸結晶（正結晶：$n_o<n_e$）の屈折率面

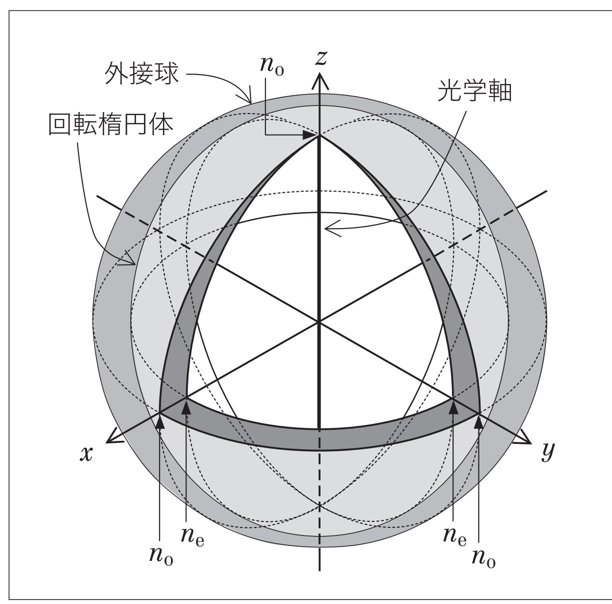

図 126–4　一軸結晶（負結晶：$n_e<n_o$）の屈折率面

の 1 つを $n_3=n_e$（e: extraordinary）と置く。特に $n_e<n_o$ の結晶は負結晶，逆に $n_e>n_o$ の結晶は正結晶と呼ばれる。屈折率面の式(126–33) を n_o, n_e で表すと

$$(n^2-n_o^2)\{[n_o^2+(n_e^2-n_o^2)s_z^2]n^2-n_o^2n_e^2\}=0 \quad (126\text{–}40)$$

のように因数分解できる（補足 5）。第 1 因子を見れば，n^2 の解の 1 つが $\boldsymbol{s}$ の方向によらず n_o^2 であることが分かる。もう 1 つの解が同じ n_o^2 になる（重根になる）のは，式(126–40) の左辺の第 2 因子も同時に 0 になる $s_z^2=1$ のときだけである。すなわち，光学軸は z 軸のみである。このように光学軸が 1 本だけの結晶は，一軸結晶と呼ばれる。なお，式(126–40) の左辺を n_x, n_y, n_z で表せば，

$$(n_x^2+n_y^2+n_z^2-n_o^2)[n_o^2\underbrace{(n_x^2+n_y^2)}_{1-n_z^2}+n_e^2n_z^2-n_o^2n_e^2]=0 \quad (126\text{–}41)$$

となる。屈折率ベクトル面は，各因子を 0 と置いた 2 つの 2 次曲面

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=n_o^2 \quad (126\text{–}42)$$

$$\frac{n_x^2+n_y^2}{n_e^2}+\frac{n_z^2}{n_o^2}=1 \quad (126\text{–}43)$$

（球と回転楕円体）になることが分かる。正結晶の屈折率面（内側が球）の例を**図 126–3** に，負結晶の屈折率面（外側が球）の例を**図 126–4** に示す。

(iii) $n_1=n_2=n_3$ の場合：

この場合の屈折率面の式は，式(126–40) で $n_e=n_o$ と置くと得られ，

$$n_o^2(n^2-n_o^2)^2=0 \quad (126\text{–}44)$$

となる。波面法線の向き $\boldsymbol{s}$ によらず（あらゆる方向で），

$$(n_1^2 s_x^2 + n_2^2 s_y^2 + n_3^2 s_z^2) n^4 - \begin{bmatrix} n_1^2(n_2^2+n_3^2)s_x^2 + n_2^2(n_3^2+n_1^2)s_y^2 \\ + n_3^2(n_1^2+n_2^2)s_z^2 \end{bmatrix} n^2 + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \tag{127–39}$$

［第 126 章の式(126–33)］に対して，$n_m \to n_m^{-1}$（m = 1, ..., 3），$s_\beta \to t_\beta$ (β = x, y, z)，$n \to n_{\mathrm{r}}^{-1}$ と置き換えた形である。なお，式(127–38) の両辺に n_{r}^4 を乗じれば，n_{r}^2 に関する 2 次方程式となる。

式(127–38) は，n_1，n_2，n_3 が非零であれば，n_{r}^{-2} に関する 2 次方程式であり，(重根の場合は重根も含めて) 2 つの正の根を持つ［前章の式(126–33) の場合と同様］。その 2 根が光線速度面を構成する 2 葉に対応し，n_{r}^2 が重根を持つ特定の軸方向で 2 葉の曲面が交わる。この軸は，光線軸，あるいは副光学軸と呼ばれる。一軸結晶では光学軸と光線軸は一致するが，二軸結晶では必ずしも一致しない。

式(127–37)，(127–19) から分かるように，n_{r} と n は

$$n_{\mathrm{r}} = \frac{c_0}{c_{\mathrm{r}}} = \frac{c_0 \cos\theta}{c} = n\cos\theta \tag{127–40}$$

の関係にある。ここで，屈折率ベクトルが

$$\boldsymbol{n} = n\boldsymbol{s} \tag{127–41}$$

で定義されたのに倣って，光線方向の屈折率の逆数に対応したベクトル

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}}{c_0} = n_{\mathrm{r}}^{-1}\boldsymbol{t} = \frac{1}{n\cos\theta}\boldsymbol{t} \tag{127–42}$$

を定義すると（$\boldsymbol{m}$ は光線ベクトル[3), 4)] と呼ばれる），式(127–22) により，

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m} = (n\boldsymbol{s})\cdot\left(\frac{1}{n\cos\theta}\boldsymbol{t}\right) = \frac{1}{\cos\theta}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t} = 1 \tag{127–43}$$

が常に（光線や法線の向きによらず）成り立つことが分かる。

屈折率面を表す式として，前章では式(127–39) を変形した

$$\frac{s_x^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_3^2} = \frac{1}{n^2} \tag{127–44}$$

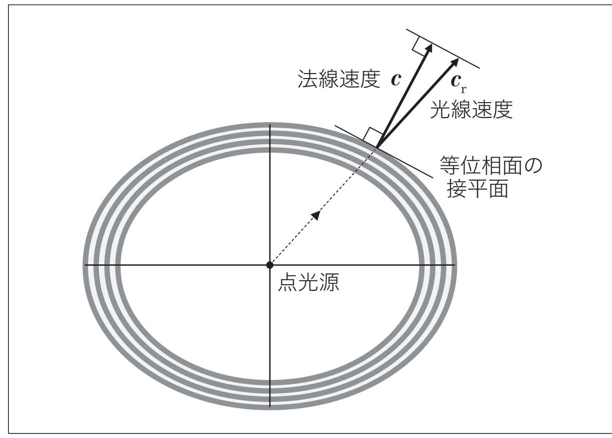

図 127–3　点光源が生成する光の場

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0 \tag{127–45}$$

などの式も紹介した［第 126 章の式(126–45)，(126–46)］。式(127–39) と式(127–38) を対応させる変数の置き換えを，式(127–44)，(127–45) に施すと，

$$\frac{t_x^2}{\frac{1}{n_{\mathrm{r}}^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{t_y^2}{\frac{1}{n_{\mathrm{r}}^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{t_z^2}{\frac{1}{n_{\mathrm{r}}^2} - \frac{1}{n_3^2}} = n_{\mathrm{r}}^2 \tag{127–46}$$

$$\frac{t_x^2}{n_{\mathrm{r}}^2 - n_1^2} + \frac{t_y^2}{n_{\mathrm{r}}^2 - n_2^2} + \frac{t_z^2}{n_{\mathrm{r}}^2 - n_3^2} = 0 \tag{127–47}$$

が得られ，フレネルの光線方程式と呼ばれる。

結晶内に点光源があったときに周囲に生成される場を，**図 127–3** に模式的に示した。点光源の位置を起点とする光線速度ベクトルの先端位置の場の位相は，どの方向の光線ベクトルについても同じである（単位時間前の光源の位相と同じ）。したがって，点光源が生成する波動場の等位相面は，光線速度面に相似である。

ホイヘンスの原理によると，等位相面上に同位相で点光源を置き，それぞれの点光源が生成する光を 2 次波として，それらの等位相面の包絡線を次の等位相面と考える。点光源は一様等方媒質中では球面波を生成したが，結晶中では光線速度面に相似な曲面を生成する。

結晶中の平面波の挙動を把握するために，前章で波数ベクトル面と法線速度面を，本章で光線速度面を紹介し

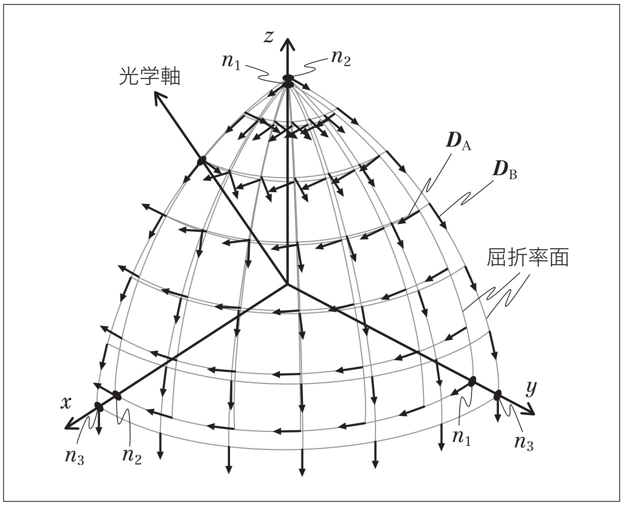

図 128–1　二軸結晶の屈折率面と $\boldsymbol{D}_A$, $\boldsymbol{D}_B$

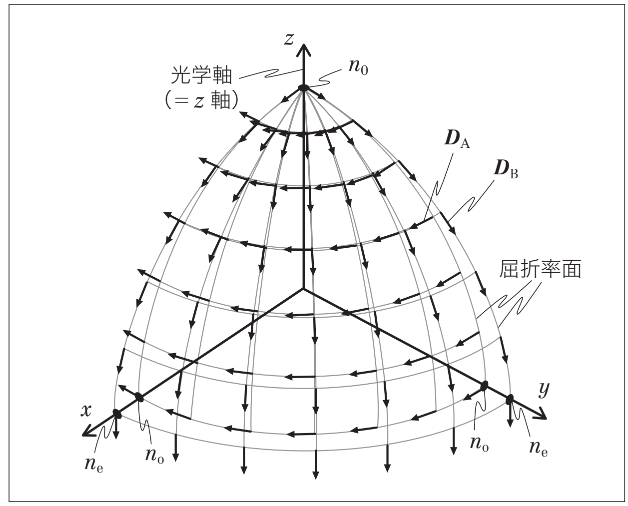

図 128–2　一軸結晶（正結晶）の屈折率面と $\boldsymbol{D}_A$, $\boldsymbol{D}_B$

となる（$\langle\ \ \rangle$ は時間平均）。たとえば，$\langle u\rangle=1/2$ とするためには，式(128–22), (128–23) の $\boldsymbol{D}_{0A}$, $\boldsymbol{D}_{0B}$ に対してそれぞれ，

$$\alpha_A=\sqrt{2\langle u\rangle(\boldsymbol{D}_{0A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{D}_{0A})^{-1}}=(\boldsymbol{D}_{0A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{D}_{0A})^{-1/2} \tag{128–35}$$

$$\alpha_B=\sqrt{2\langle u\rangle(\boldsymbol{D}_{0B}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{D}_{0B})^{-1}}=(\boldsymbol{D}_{0B}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{D}_{0B})^{-1/2} \tag{128–36}$$

を乗ずればよい。二軸結晶の場合の屈折率面と，種々の $\boldsymbol{s}$ に対する $\boldsymbol{D}_A$, $\boldsymbol{D}_B$ の振幅を**図 128–1** に示した。また，一軸結晶の場合についての同様のプロットを**図 128–2** に示した。

図中，2 葉の屈折率面それぞれに，球座標 θ と ϕ の値が一定となる格子線を描いた。格子線の交点を起点に，(θ, ϕ) 方向の $\boldsymbol{s}$ に対応する $\boldsymbol{D}_A$ と $\boldsymbol{D}_B$ を図示している（$-\boldsymbol{D}_A$ や $-\boldsymbol{D}_B$ でモードを表しても同じモードである）。光学軸方向以外では，n の 2 つの根に対応して，式(128–22) と (128–23) は独立した 2 つのモードを与える。

（余談）

以上で，波面が $\boldsymbol{s}$ に垂直な平面波の表式を導くことが一応できた。しかし，式(128–21) の右辺で，$\alpha=-\varepsilon(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}_0)$ が 0 になる場合に $\boldsymbol{D}_{0A}$ と $\boldsymbol{D}_{0B}$ は零ベクトルにならないのか，式(128–22), (128–23) で成分の表式の分母が 0 になる場合はどう扱うか，2 次方程式の解 n_A, n_B が重根の場合に $\boldsymbol{D}_{0A}$ と $\boldsymbol{D}_{0B}$ は独立に存在できるのかなど，不安も残るのではないだろうか。この辺りの事情を確認する。

［電場 $\boldsymbol{E}_0$ が $\boldsymbol{s}$ に垂直となる場合］

まず，

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}_0=0 \quad (\alpha=0) \tag{128–37}$$

となる場合について考えてみる。このとき，式(128–10) は

$$\frac{1}{n^2}\varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0} \Rightarrow \varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0=n^2\boldsymbol{E}_0$$
$$\Rightarrow \varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{D}_0=n^2\boldsymbol{E}_0 \tag{128–38}$$

となり，$\boldsymbol{D}_0$ と $\boldsymbol{E}_0$ は平行になることが分かる。行列で表すと

$$\varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{D}_0=\begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}=n^2\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} \tag{128–39}$$

となる。すなわち，$\boldsymbol{E}_0$ が（したがって $\boldsymbol{D}_0$ も）式(128–39) の対角行列の固有ベクトルになる。これは，二軸結晶であれば $\boldsymbol{E}_0$ が電気的主軸方向（図 128–1, 2 の xyz 軸方向）を向く場合，一軸結晶であればその場合に加えて $\boldsymbol{E}_0$ が光学軸に垂直な場合，光学的等方結晶（等軸結晶，立方

波動光学の風景……127

129. 屈折率楕円体

前章では，媒質の光学特性が磁気定数 μ_0 と誘電率テンソル

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\varepsilon_0\begin{pmatrix}n_1^2 & 0 & 0\\ 0 & n_2^2 & 0\\ 0 & 0 & n_3^2\end{pmatrix} \qquad (129\text{–}1)$$

で与えられる一様な媒質を考え，単位ベクトル $\boldsymbol{s}$ で波面の法線方向が与えられる平面波を

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\exp(ik_0n\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}) \qquad (129\text{–}2)$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon E}=\boldsymbol{\varepsilon E}_0\exp(ik_0n\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{D}_0\exp(ik_0n\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}) \qquad (129\text{–}3)$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\exp(ik_0n\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}) \qquad (129\text{–}4)$$

などとして具体的な表式を導いた。ただし，時間因子は $e^{-i\omega t}$ とし，真空中の波数 k_0（$=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$）を用いて，波数ベクトルを $\boldsymbol{k}=k_0\boldsymbol{n}=k_0n\,\boldsymbol{s}$ のように表した。ここで n を未知数とした。

概略を復習すると，式(129–2)~(129–4) をマクスウェル方程式に代入して得られる

$$n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}_0=-c_0\boldsymbol{D}_0 \qquad (129\text{–}5)$$

$$n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}_0=c_0\mu_0\boldsymbol{H}_0 \qquad (129\text{–}6)$$

の両式から $\boldsymbol{H}_0$ を消去すると，$\boldsymbol{E}_0$ が満たすべき関係式

$$n\boldsymbol{s}\times(n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}_0)=-c_0^2\mu_0\boldsymbol{D}_0=-\varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{D}_0$$

$$\Rightarrow\ n^2[\boldsymbol{E}_0-(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}_0)\boldsymbol{s}]=\varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{D}_0$$

$$\Rightarrow\ n^2[\boldsymbol{E}_0-(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}_0)\boldsymbol{s}]=\varepsilon_0^{-1}\boldsymbol{\varepsilon E}_0 \qquad (129\text{–}7)$$

が得られる。また，式(129–5) から $\boldsymbol{D}_0$ は $\boldsymbol{s}$ に垂直であることが分かる。

式(129–7) に非零の解 $\boldsymbol{E}_0$ が存在するための条件から 2 つの n が定まる。これを n_{A}，n_{B} とすると，$\boldsymbol{D}_0$ の数式表現が

$$\boldsymbol{D}_{0\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}s_x/(n_{\mathrm{A}}^{-2}-n_1^{-2})\\ s_y/(n_{\mathrm{A}}^{-2}-n_2^{-2})\\ s_z/(n_{\mathrm{A}}^{-2}-n_3^{-2})\end{pmatrix} \qquad (129\text{–}8)$$

$$\boldsymbol{D}_{0\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}s_x/(n_{\mathrm{B}}^{-2}-n_1^{-2})\\ s_y/(n_{\mathrm{B}}^{-2}-n_2^{-2})\\ s_z/(n_{\mathrm{B}}^{-2}-n_3^{-2})\end{pmatrix} \qquad (129\text{–}9)$$

のように得られる（必要があれば正規化をする。分母が 0 になる場合，n が重根となる場合等は，元の方程式に戻れば対応できる：前章を参照)。これで平面波の数式表現は導かれた。しかし，式(129–8)，(129–9) からは，どのような向きに電束密度 $\boldsymbol{D}$ が向くのか，イメージを描きにくい。

波面の法線方向が $\boldsymbol{s}$ で与えられたとき，固有モードである平面波の $\boldsymbol{D}$ の向きを幾何学的に把握する上で，屈折率楕円体の概念が有効である。**図 129–1** に屈折率楕円体の概形を示す。屈折率楕円体は，2 次の閉曲面

$$\frac{x^2}{n_1^2}+\frac{y^2}{n_2^2}+\frac{z^2}{n_3^2}=1 \qquad (129\text{–}10)$$

さらに，式(130–42), (130–52) などを用いると，

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{D}_0)\boldsymbol{c}_\mathrm{r} \tag{130–55}$$

となる。ここで，$(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{D}_0)/2$ は，電磁場（電場と磁場）のエネルギー密度［第 127 章の式(127–56) 参照］に対する時間平均値に相当する。

波面法線と光線

波動場としての光の挙動を理解するためには，波面やその法線方向は基本的に重要である。境界条件や干渉現象に関係する考察では，位相の空間分布は本質的と言える。その一方で，光のエネルギーが光線に沿って供給されて種々の現象が生じることから，光線方向も重要である。光の利用にはエネルギーの移動が伴うことを思えば，これもまた本質的である。等方媒質では波面の法線方向と光線の方向は一致するが，異方性媒質中では一致しない。そのため，目的に応じて相互の関係を考慮することが必要になることが多い。

結晶中の平面波に関してこれまでに導いてきた主な要点をまとめる。等位相面（波面）の法線方向を単位ベクトル $\boldsymbol{s}$ で表し，光線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{t}$ で表すものとする。このとき，

- 波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は，$\boldsymbol{s}$ を用いて $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{s} = nk_0\boldsymbol{s}$ $(k_0 = \omega/c_0)$ と表すことができる。また，屈折率ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} = n\boldsymbol{s}$ で定義される。
- 波面の法線方向が単位ベクトル $\boldsymbol{s}$ で与えられたとき，k あるいは n の値はフレネルの方程式の解として与えられ，重根も含めて 2 つの解がある。
- 法線速度 $\boldsymbol{c}$ は法線方向に等位相面が移動する速度で $c = c_0/n$ で与えられる。
  あらゆる方向の $\boldsymbol{c}$ の先端で構成される面は法線速度面と呼ばれ，n の 2 つの解に対応する 2 葉の面からなる。
- あらゆる方向の $\boldsymbol{k}$ の先端で構成される面は波数ベクトル面と呼ばれる。
- あらゆる方向の $\boldsymbol{n}$ の先端で構成される面は屈折率面と呼ばれる。屈折率面は波数ベクトル面と相似である。
- 光線の向きは，エネルギー流の向きと考えても，光ビームの向きと考えても同じである。
- 光線速度 $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ は光線方向に等位相の位置が移動する速度である。光線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を用いて，$\boldsymbol{c}_\mathrm{r} = c_\mathrm{r}\,\boldsymbol{t} = (c_0/n_\mathrm{r})\,\boldsymbol{t}$ と表すことができる。
- 光線方向が単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ で与えられたとき，c_r あるいは n_r の値は，フレネルの方程式と双対関係にある方程式の解として与えられ，重根も含めて 2 つの解がある。
- あらゆる方向の $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ の先端で構成される面は光線速度面と呼ばれ，2 葉の面からなる。ホイヘンスの原理の 2 次波の波面は光線速度面を用いる。
- ベクトル $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{t}$ の間の角度を $\theta\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t} = \cos\theta)$ とすると，$n_\mathrm{r} = n\cos\theta$ となる。
- 法線速度ベクトル $\boldsymbol{c}$ の先端を通り $\boldsymbol{c}$ と直交する平面群の包絡面は，光線速度面になる。
  また，$\boldsymbol{c}$ の先端の等位相面が光線速度面に接する接点が，$\boldsymbol{c}$ に対応する光線速度ベクトル $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ になる。
- 光線速度ベクトル $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ は（したがって $\boldsymbol{t}$ も），波数ベクトル面（および相似形である屈折率面）の接平面に垂直になる。

なお，光線ベクトル $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c}_\mathrm{r}/c_0 = (n\cos\theta)^{-1}\boldsymbol{t}$ を定義すると $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m} = 1$ が成り立つ［第 127 章の式(127–43)］。したがって，$\boldsymbol{n}$ の先端を屈折率面内で微小に移動して $\boldsymbol{n}+\delta\boldsymbol{n}$ とし，それに応じて $\boldsymbol{m}$ が $\boldsymbol{m}+\delta\boldsymbol{m}$（$c_0$ 倍すれば $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ の先端が光線速度面内で動いて $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}+\delta\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$）になったとすると，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{m}+\delta\boldsymbol{m})\cdot(\boldsymbol{n}+\delta\boldsymbol{n}) \approx \overbrace{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}^{1} + \boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{m} = 1\\ &\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{m} = -\,\boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{n}\end{aligned} \tag{130–56}$$

も成り立つ。左辺は，屈折率ベクトル $\boldsymbol{n}$（したがって，$\boldsymbol{c}$ や $\boldsymbol{k}$）が，$\boldsymbol{m}$ や $\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ の微小変化（したがって，光線速度面の接平面）に垂直であることから 0 になる（第 127 章の図 127–2，3 辺りで $\boldsymbol{c} \perp \delta\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ を説明した）。また，右辺は，$\boldsymbol{m}$（したがって，$\boldsymbol{c}_\mathrm{r}$ や $\boldsymbol{t}$）が，屈折率ベクトル $\boldsymbol{n}$ の微小変化（したがって，屈折率面の接平面）に垂直であることから 0 になる（第 127 章の余談の直前で $\boldsymbol{c}_\mathrm{r} \perp \delta\boldsymbol{n}$ を説明した）。第 127 章では別々に説明したが，式(130–56) を用いれば，一方から他方を導くことができる。

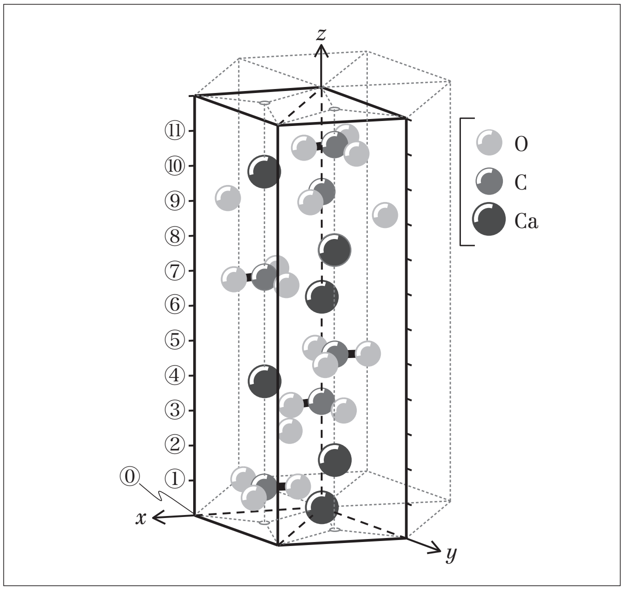

図 131–4　方解石の単位胞

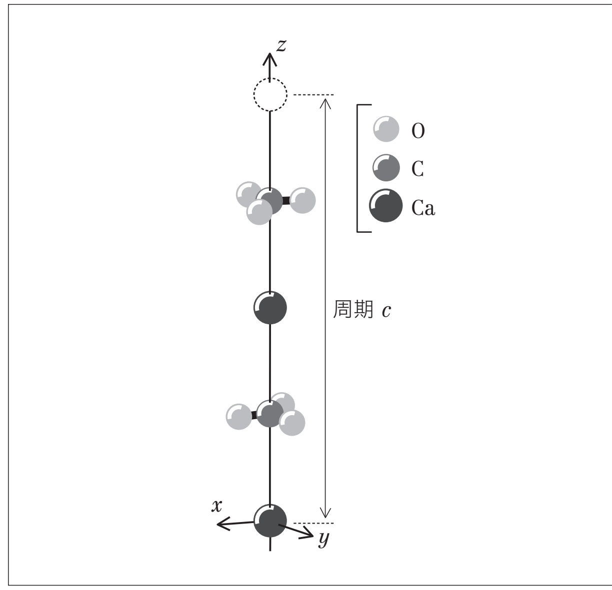

図 131–5　軸上の配置

(Crystallographic Information File) ファイル[1] からの抜粋である。CIF は，IUCr (International Union of Crystallography) が定めた標準形式のテキストファイル[8, 9] である。

図 131–4 に六方格子としての単位胞と，単位胞内の各粒子の配置を示した。炭素原子は酸素原子 3 つと組み合わさり，平板状の正三角形（中心に C，頂点に O）を形成するように配置して炭酸イオンとなっている。これが，Ca イオンと c 軸方向に交互に配置する。ただし，正三角形の向きは交互に反転している（C-O 結合の一つは a 軸方向を向く）。原点の Ca を基準に，Ca イオンと CO_3 イオンが c 軸方向に串刺しになった形を**図 131–5** に示す。

なお，図 131–4 では，頂点や辺や側面の粒子は，等価な粒子の代表を 1 つのみ表示した。したがって，図示された Ca は 6 個，C も 6 個，O は 18 個であり，組成比に等しい。各位置から $n_1\boldsymbol{a}+n_2\boldsymbol{b}+n_3\boldsymbol{c}$ (n_1, n_2, n_3 は整数) だけ並進した位置にも同じ粒子を置くと，結晶全体の配置となる。

粒子の位置を表すのに，格子ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を基底ベクトルとする斜交座標系 x, y, z で表すものとする。このとき，この単位胞の内部は $0 \leqq x < 1$，$0 \leqq y < 1$，$0 \leqq z < 1$ がすべて成り立つ領域となる。図 131–4 の内，c 軸上の Ca の z 座標は 0 と 1/2 であり，c 軸上の C の z 座標は 1/4 と 3/4 である。原点の Ca がセンタリングによって移動する先の座標は $(x, y, z)=(2/3, 1/3, 1/3)$ と $(x, y, z)=(1/3, 2/3, 2/3)$ であり，そこから c 軸上と同じ構造が再現される。したがって，すべての粒子の z 座標は $m/12$ (m は整数) で表される。粒子の配置を明確にするため，平面 $z=m/12$ ($m=0$~11) を考えたときの，面内の粒子の位置を**図 131–6** の⓪～⑪に示す。各面の位置を図 131–4 に⓪～⑪で示した。

図 131–7 に CIF ファイル[1] のデータの一部を示した。図 131–4~図 131–6 は，このデータに基づいて作図した。図 131–7 のリストの 3 行目の 'x, y, z' から始まる 36 行は，一般の位置 (x, y, z) が，空間群 $R\bar{3}c$ の要素である対称操作によってどこへ移動するかを（前記の斜交座標 x, y, z で）示したものである。

図 131–7 の中で示される 36 の対称操作は，それぞれ空間群 $R\bar{3}c$ の要素であり，式(131–1) のザイツ演算子 $\{R/\boldsymbol{t}\}$ の形で表すことができる。このときの R は，空間群の属している点群 (point group of a space group) と呼ばれる[4]。また，$\boldsymbol{t}$ は格子サイズ以下の並進であるから，巨視的な結晶の寸法と比較すれば無視し得る大きさの並進である。そのため，結晶の外形などの巨視的な性質の多くは，結晶点群 R の対称性を持つ。

図 131–8 に $R\bar{3}c$ の属している点群の要素を図示した。図中の数字は，それぞれ図 131–7 に加筆した番号が示

波動光学の風景……130

132．方解石越しの二重像

前章では，方解石の微視的な構造と，巨視的な性質（稜線の向き，光学軸の方向，負結晶性の由来など）との関係を概観した。次に，もう少し具体的な光学現象を眺めておきたい。紙の上に印刷された文字が，結晶を乗せたときに二重に見えることは，小中学生の頃に聞いた人も多いであろう。そこで，白点を描いた黒い紙を机上に置き，その上に方解石を乗せて真上から見るという単純なモデルを考え，どのような画像が見えるか，計算してみよう。

図 132–1 に，黒い背景に白点を描いたパターンを示す。

方解石の結晶は，前章で示したモデルを考える。結晶構造と光学特性の要点を，**表 132–1** に示す。

結晶は，ミラー指数 (104) の面と等価なへき開面で囲まれた平行六面体を考える。**図 132–2** に，机面に置いた方解石の外形を，3 方向からの正投影図で示す。図中の A–A′ を通り，机面に垂直な断面を考えると，**図 132–3** のようになる。図 132–2 の A–A′ の向き，すなわち，$\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2$ の方向に改めて x 軸をとり，$\boldsymbol{l}_2-\boldsymbol{l}_1$ の方向に y 軸をとる。こうすることで，x 軸と y 軸が張る平面が，机面に接するへき開面になる。

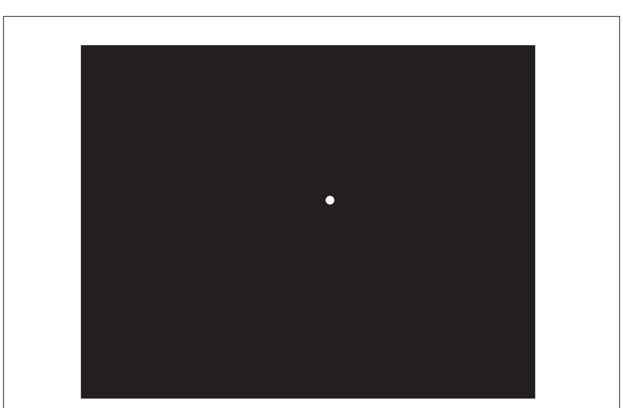

図 132–1　黒い背景に白点を描いたパターン

表 132–1　方解石の結晶構造と光学特性 [1)~3)]

項目	値
組成式	$CaCO_3$
結晶系	三方晶系（trigonal）
空間群	$R\bar{3}c$ (ITA : No. 167)
a, b, c	$a=b=4.988$ Å, $c=17.068$ Å
α, β, γ	$\alpha=\beta=90°$, $\gamma=120°$
へき開面	$\{hkl\}=\{104\}$
	$(\{hkil\}=\{10\bar{1}4\})$
n_o	1.6550 (波長640 mm)
n_e	1.4849 (波長640 mm)

このとき，光学軸が机面となす角を求めてみよう。前章でも $\phi'=45.35°$ を導いたが，そのときは格子定数（$a=b$, c, $\alpha=\beta=90°$, $\gamma=120°$）とへき開面のミラー指数 $\{hkl\}=\{104\}$ を用いた。ここでは，外形の測定から求められる稜線間の角度

$$u=2\sin^{-1}\frac{6}{\sqrt{48+(c/a)^2}}\approx 101.88° \qquad (132\text{–}1)$$

索　引

事項

索　引

人名

記号

著者略歴

本宮佳典（ほんぐう・よしのり）, Yoshinori Hongu

1956年 神奈川県藤沢市生まれ
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業
1979年 東京大学理学部物理学科卒業
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士
　　　同年，株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー
2018年 株式会社東芝 研究開発センター（2021.10退職）
　　　法政大学理工学部（兼任講師）（2018.4〜）

第20回（2019年度）応用物理学会業績賞（教育業績）受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/

波動光学の風景　結晶編（2）

2020年5月25日初版発行
2023年2月1日第2版発行

著　者　　本　宮　佳　典
発行者　　喜　多　野乃子
発行所　　アドコム・メディア株式会社
〒169-0073　東京都新宿区百人町2-21-27
電話　(03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2020
ISBN 978-4-910636-23-8　C3042　¥3300E

印刷/製本　㈱ブックフロント
Printed in Japan