

# 波動光学の風景

ミ ー 散 乱 編 ( 2 )

本宮佳典 著

試し読み



Advanced Communication Media  
アドコム・メディア株式会社

この電子書籍は、月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の、2013 年 9 月号から 2014 年 2 月号までに掲載された分をまとめたものである。本編ではミー散乱の計算に実質的に必要な関係式として、幾つかの基本的な漸化式と、それらを使った計算例などを紹介する。

ミー散乱は一様等方媒質でできた球状粒子による平面波光の散乱である。ミーがこの散乱理論を発表して以来、100 年以上を経ているが、ミー散乱に関わる学術論文は 30 ～ 40 年前頃から顕著に増加し、幅広く活用されるようになってきたことが分かる。計算機の普及がその主な要因の一つであろう。数学的に解が導かれても、実用的な技術として活用されるためには数値計算技術の普及も重要である。

既刊のミー散乱編 (1) で紹介したように、散乱された光の場は、球面調和関数、球ベッセル関数などで展開された形式で表現され、その展開係数もこれらの関数を使って表されるものであった。既刊ではこれらの関数は、べき級数の形を用いて規定されていた。べき級数展開は、微分方程式を解いたり、関数の性質を導いたりする上では強力な手法である。しかし、解析的な収束性が良好な級数ではあっても、実用的な計算には不向きな場合もある。ミー散乱の場合、標的球の半径の正規化された値についてのべき級数になる。そのため、波長の数十倍以上の半径の球を考えると、絶対値の大きな項が現れ、それらの和や差を求める演算

が生じる。そうすると、固定精度の数値計算では精度が低下し、まともな結果さえ得られなくなる。

この問題の対策として、漸化式を用いる方法が有効である。本編では場の  $\theta$  依存部分、 $r$  依存部分を表す関数の値を求めるための基本的な漸化式を紹介する。媒質の消衰係数が小さい場合に有効な漸化式と、大きい場合に有効な漸化式を紹介した。

近年、ウェブサイトを通じて種々のプログラムや計算ツールを利用できる。しかし、必要な処理を整理すれば 70 行にも満たないプログラムで実現できる計算であるから、パソコン環境があればプログラムの自作は容易である。理論の流れを確認し、計算手順を考えることで、理解の進む面もあるように思う。拙作ながらプログラム例を紹介した。実用目的ではなく、本書の内容の具体的な理解が目的であり、動作や計算結果に対して責任を負うものではないが、その旨をご理解の上、参考としてご利用いただければ幸いである。

最後に虹についての計算例を紹介した。虹の特徴の多くは幾何光学的に説明することができる。しかし、水滴の大きさに依存する微妙な色合いなどに注目すると、波動光学的な描像が必要になる。身近でよく知られた馴染み深い現象であっても、よく見ればさらに尽きない奥深さがあり、色々な見どころ、味わいどころがあると思う。もし、虹のある風景との出会いを楽しみに思っていたくよすがにでもなれば、著者として望外の喜びである。

---

|         |      |              |
|---------|------|--------------|
| 第 98 回  | 100. | ルジャンドル陪関数の計算 |
| 第 99 回  | 101. | 球ベッセル関数の計算   |
| 第 100 回 | 102. | ミー散乱の計算例     |
| 第 101 回 | 103. | ミー散乱の計算の収束性  |
| 第 102 回 | 104. | ミー散乱の断面積     |
| 第 103 回 | 105. | 虹            |

---

# 波動光学の風景……◆

## 100. ルジャンドル陪関数の計算



ミー散乱の計算に必要な特殊関数について、べき級数、あるいは有限項のべき級数を含む初等関数などの形式で紹介した（第 96 章，第 97 章参照）。これらの表式は、関数の基本的な性質を理解するための重要な基礎である。しかしながら，有効桁数の限られた演算では丸め誤差の影響が避けられない。べき展開する変数の値が小さいときには，計算精度も高い。しかしながら，変数や次数の値が大きくなると，高次項が大きくなるため，加減算の過程で，情報落ち（絶対値の大きな数と小さな数の加減算で，小さな数値が無視される）や，桁落ち（値の近い数の減算で有効数字が減少する）の影響が大きくなり，誤差が無視できなくなる。

そこで，より実際の手法として，漸化式を使った計算方法を紹介する。まず， $\theta$  依存性を表す関数について本章で紹介し， $r$  依存性を表す関数については次章で紹介する。

散乱波の電磁場の各成分 ( $E_r, E_\theta, E_\varphi, H_r, H_\theta, H_\varphi$ ) は，それぞれ  $r, \theta, \varphi$  の関数として与えられる [第 99 章，式 (99-36) ~ (99-43) を参照]。これらの内， $\theta$  依存性は， $\xi = \cos \theta$  として，ルジャンドルの陪関数  $P_l^1(\xi)$  およびその導関数  $P_l^{1'}(\xi)$  を使って与えられる ( $l = 1, 2, \dots$ )。以下ではルジャンドルの陪関数の概形と，計算に便利な漸化式を紹介する。

まず， $l$  次のルジャンドルの多項式  $P_l(\xi)$  は， $0 \leq l$  を満たす整数  $l$  に対して，

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \quad (100-1)$$

で与えられる [ロドリゲスの公式：第 96 章の式 (96-36)]。右辺を二項定理で展開して項別微分すれば，べき展開の表式が得られ，

$$\begin{aligned} P_l(\xi) &= (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} (-\xi^2)^k \\ &= (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{k!(l-k)!} \xi^{2k} \\ &= (-1)^l \frac{1}{2^l} \sum_{k=\left[\frac{l+1}{2}\right]}^l \frac{(-1)^k}{k!(l-k)!} \frac{(2k)!}{(2k-l)!} \xi^{2k-l} \end{aligned} \quad (100-2)$$

となる。ただし，微分前の次数  $2k$  が微分回数  $l$  より小さい項は， $l$  回の微分によって 0 になる。したがって， $k$  についての和をとる範囲は，

$$\left[ \frac{l+1}{2} \right] \leq k \leq l \quad (100-3)$$

とする。ここで，ガウス記号  $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数を表すものとする。

ルジャンドル陪関数  $P_l^m(x)$  は， $0 \leq m \leq l$  を満たす整数  $m$  に対して，

$$\begin{aligned} P_l^m(\xi) &= (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(\xi)}{d\xi^m} \\ &= \frac{1}{2^l l!} (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l \end{aligned} \quad (100-4)$$

で与えられる [第 96 章，式 (96-37) 参照]。先と同様に，二項定理で展開して項別微分すれば，べき展開の表式



さらに入射光が非偏光（自然光）の場合の  $\theta$  方向の散乱強度は、 $I(\theta, \varphi)$  の  $\varphi$  に関する平均をとれば求まり、

$$I(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta, \varphi) d\varphi = \frac{I_1(\theta) + I_2(\theta)}{2} \quad (102-29)$$

となる。すなわち、 $I_1$  と  $I_2$  の相加平均となる。

式(102-26)~(102-29)に従って  $I_1(\theta)$  と  $I_2(\theta)$  を  $I_0$  で正規化した散乱光の分布の計算例を図 102-4 に示す。

球が波長に比べて十分小さい場合、ミー散乱は、レイリー散乱に近づく（補足を参照）。レイリー散乱に近い状況の計算例を図 102-5 に示す。標的である球が、小さいながらも大きさを持った影響で、球の前部と後部の分極の振動にわずかな位相差が生じる。これが、後方に散乱する光に対しては弱め合う作用を持つ。ミー散乱の特徴として、前方散乱が大きく後方散乱が小さいと言われるが、既にその兆候が表れている。

ミー散乱は、雲や霧などの気象分野、煙や塵埃などの環境分野、生体組織などの生命分野、あるいは照明等で用いられる光拡散用の部材分野など、種々の分野で幅広く使われている。近年はフォトニックナノジェット<sup>2)</sup>などの現象も注目され、多くの話題にかかわる分野である。

ミー散乱の fortran77 プログラム例を図 102-6 に示す。計算が良好に収束して妥当な結果が得られるか否かは、標的球の大きさや球内外の屈折率、計算機の内部表現の有効桁数などに依存する。球の屈折率や半径の条件

が計算例と大きく異なる場合には、このプログラムでは必ずしも妥当な計算結果が得られない場合もある。あくまでも処理の流れの例として参考にされたい。

本章の本文の説明やプログラムでは、関数  $\zeta_l^{(1)}(z)$ ,  $\psi_l(z)$  やその導関数を計算するために、第 101 章で示した漸化式をそのまま用い、添え字の小さなものから大きなものを順に求める方法を用いた。しかしこの方法では、

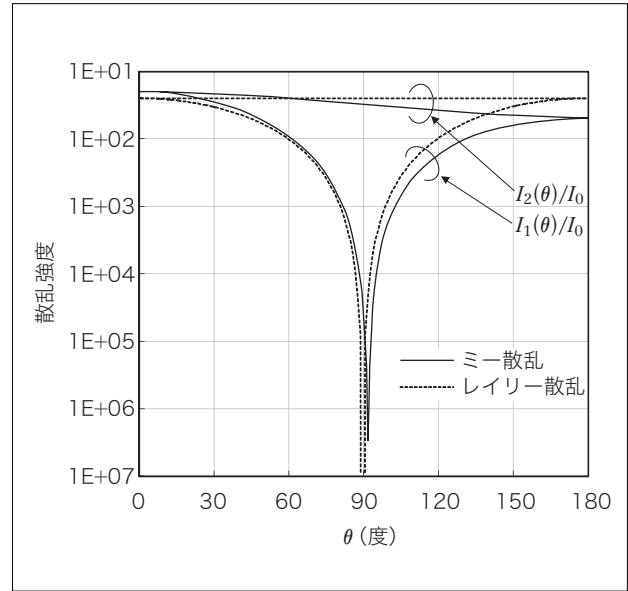


図 102-5 ミー散乱とレイリー散乱の比較例 ( $I_1$ : 電場//観測面,  $I_2$ : 電場⊥観測面)  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1$  (空気),  $n_2 = 1.33$  (水),  $d = 2a = 0.2 \mu\text{m}$  ( $q_1 = 2\pi n_1 a / \lambda_0 = 0.99292$ )

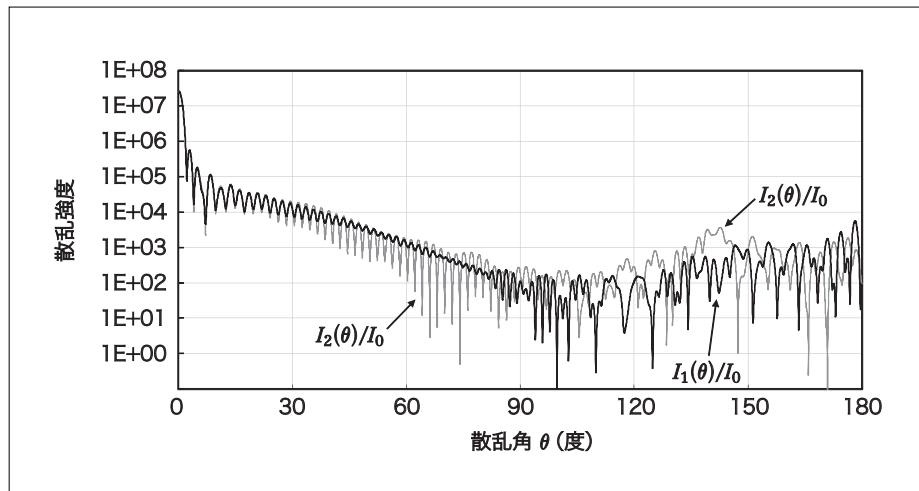
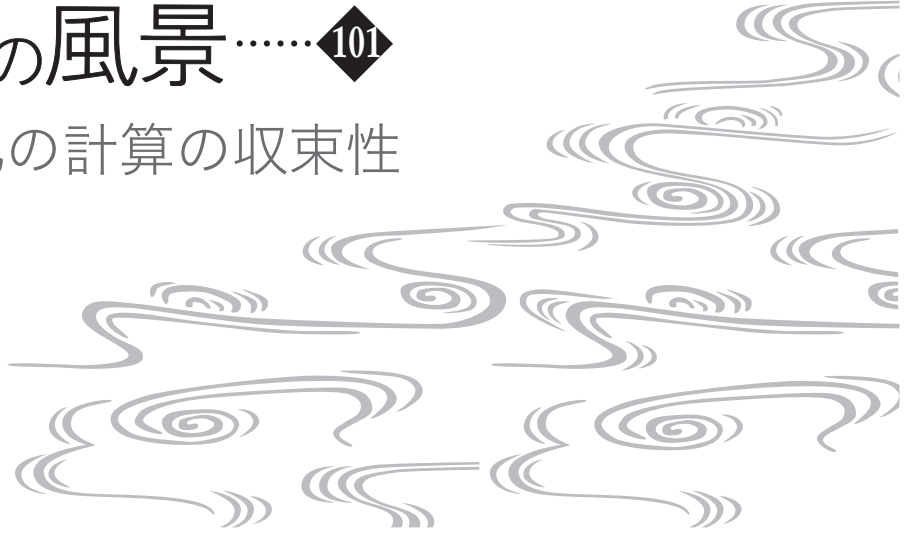


図 102-4 ミー散乱の計算例 ( $I_1$ : 電場//観測面,  $I_2$ : 電場⊥観測面)  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1$  (空気),  $n_2 = 1.33$  (水),  $d = 2a = 20 \mu\text{m}$  ( $q_1 = 2\pi n_1 a / \lambda_0 = 99.292$ )

# 波動光学の風景……◆101

## 103. ミー散乱の計算の収束性



前章で、ミー散乱の計算例を紹介した。そこでは、関数  $\zeta_l^{(1)}(z)$ ,  $\psi_l(z)$  やその導関数を計算するために、漸化式を使って添え字の小さなものから大きなものを順に求める方法を使った。これは基本的な手法であるが、標的球の屈折率の虚部が大きく、標的球が大きい場合には、収束性がよくなかった。本章ではその代表的な対策として、対数微分を用いて添え字の大きなものから小さなものを順に求める方法を紹介する。ただし、こちらの方が手法として常に優れている訳ではなく、標的球の屈折率の虚部が小さい場合には収束性がよくない。そのような領域では、前章で紹介した手法の方が収束性のよい場合もある。

数値計算の収束性の改善は、初学者が波動光学を学ぶ上で欠かせない基礎という訳ではない。しかしミー散乱は、近年多くの分野で関心を持たれている。環境、医用、バイオなどへの応用や、プラズモン、近接場光学現象、光拡散用部材の設計など、多くの分野で用いられ、期待されている。こうしたミー散乱の応用に興味のある読者には、数値計算の可否にかかわる基本的な収束性は重大な関心事であろう。以下で示す手法は、最先端の収束性を目指すものではなく、金属球等に対しては必須に近い基本的な計算技術であり、漸化式の使い方としても興味深く、さらなる収束性向上の基礎にもなるものである。

ミー散乱の数式表現の中で用いられる係数  ${}^eB_l$ ,  ${}^mB_l$  は  $l = 1, 2, 3, \dots$  に対して、

$${}^eB_l = i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \times \frac{n_2 \psi_l'(q_1) \psi_l(q_2) - n_1 \psi_l(q_1) \psi_l'(q_2)}{n_2 \zeta_l^{(1)'}(q_1) \psi_l(q_2) - n_1 \zeta_l^{(1)}(q_1) \psi_l'(q_2)} \quad (103-1)$$

$${}^mB_l = i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \times \frac{n_2 \psi_l(q_1) \psi_l'(q_2) - n_1 \psi_l'(q_1) \psi_l(q_2)}{n_2 \zeta_l^{(1)}(q_1) \psi_l'(q_2) - n_1 \zeta_l^{(1)'}(q_1) \psi_l(q_2)} \quad (103-2)$$

で与えられる [第 102 章の式(102-9), (102-10)参照]。ただし、

$$q_1 = ka = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 a \quad (103-3)$$

$$q_2 = k_2 a = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 a \quad (103-4)$$

と置いた。ここで、標的球の半径を  $a$ 、標的外部の透明媒質の屈折率（実数）を  $n_1$ 、標的球の屈折率を  $n_2$ 、真空中の波長を  $\lambda_0$  とした。

前章の計算では、関数  $\zeta_l^{(1)}(z)$  と  $\psi_l(z)$  については、漸化式

$$\zeta_{l+1}^{(1)}(z) = \frac{2l+1}{z} \zeta_l^{(1)}(z) - \zeta_{l-1}^{(1)}(z) \quad (103-5)$$

$$\psi_{l+1}(z) = \frac{2l+1}{z} \psi_l(z) - \psi_{l-1}(z) \quad (103-6)$$

[第 101 章の式(101-19), (101-21)], および初期条件

主虹の色が、対日点を中心にして外側が赤、内側が青になることが分かる。同様に、副虹は外側が青、内側が赤となることも分かる。また、赤は他の色があまり混じらないために鮮やかであるのに対し、青のピークには赤い光も混じるため、やや白んだ色調になることも理解できる。

以上の計算に用いたパラメーターを表 105-1 に示す。気温は 15 度を仮定した。

このように、種々の波長に対して、散乱光の角度分布を計算できる。これを、視点を変えて散乱角ごとに見れば、分光反射率と見なすことができ、物体色として虹の色を算出することが可能である。先に示した例と同様に、光源色としては D55 を用いて計算した<sup>4)</sup>。

図 105-14 に輝度分布の角度依存性をプロットした。水滴の幾何学的な断面積で正規化して、角度依存性を相対値で示した。水滴が小さいとき、干渉効果による増減が目立ち、明るさのピークは角度幅が広がる。逆に水滴が大きくなると、明るさのピークは角度幅が狭く急峻になり、幾何光学的な特性に近づく。

表 105-1 計算に用いたパラメーター

| パラメーター        | 記号        | 値                                        | 単位            | 参考文献  |
|---------------|-----------|------------------------------------------|---------------|-------|
| 波長            | $\lambda$ | 650(赤), 450(青)                           | nm            |       |
| 水滴直径          | $d = 2a$  | 1000                                     | $\mu\text{m}$ |       |
| 外部屈折率<br>(空気) | $n_1$     | 1.0002805 (450 nm)<br>1.0002763 (650 nm) |               | 3)    |
| 球部屈折率<br>(水)  | $n_2$     | 1.3400227 (450 nm)<br>1.3320678 (650 nm) |               | 1, 2) |

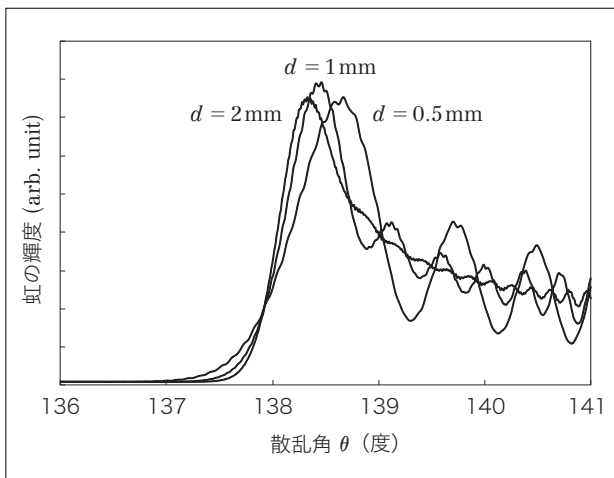


図 105-14 虹の輝度の計算値

図 105-15, 図 105-16 に、水滴の直径が 0.5 mm および 4 mm のときの角度ごとの色度の計算値を示す (XYZ 表色系における色度座標  $x, y$  による色度図)。

図 105-15 と図 105-16 から分かるように、 $\theta$  が小さい領域では赤から黄色にかけての純色に近い色を示すが、 $\theta$  が大きくなると純色から離れ、白んだ色調になる。また、水滴の大きさによって虹の色合いは微妙に変化する。

本章はミー散乱の応用例として虹の説明を試みた。話を簡単にするため、入射光は平行光と仮定したが、実際は太陽の視半径に相当する角度分布があり、その影響は無視できない。また、手近に数値のある D55 で太陽光のスペクトルを近似したが、実際の太陽の色は地理的条件や気象条件、時間帯などに依存する。水滴の粒径分布も考慮しなければならないし、そもそも粒子が球体と仮定したことも大きな近似と思われる。背景となる空の色や、多重散乱、手前にある空気中の散乱などの影響因子も考えられる。虹はよく見れば複雑な現象である。

虹を見たときに、原理を理解したと思って眺める一層の味わい深さは、理系科目を学んだ者の特権の一つだと思う。しかし、理解し尽くせない偶然の要素が畳み込まれた色との稀有な出会いであるという側面も含めて味わいたい風景である。

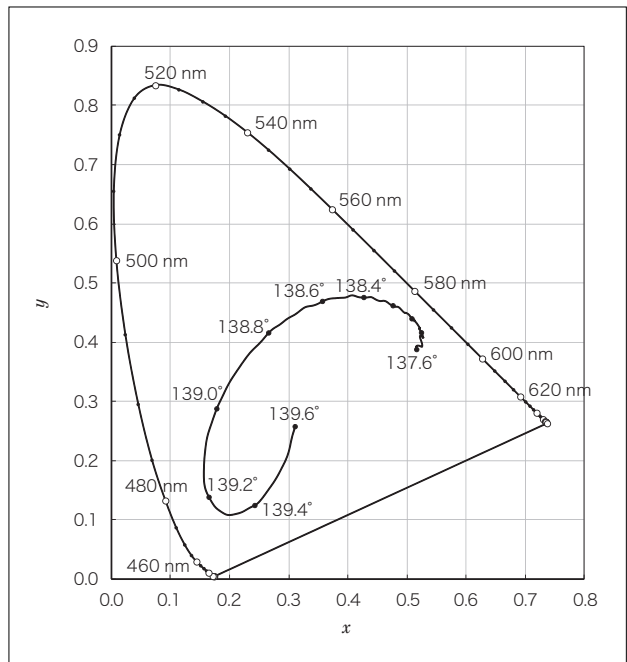


図 105-15 虹の色度の計算値 (水滴の直径 = 0.5 mm)

## ■ 事項

|                                 | 頁  | カラム | 行   |                                 | 頁  | カラム | 行    |
|---------------------------------|----|-----|-----|---------------------------------|----|-----|------|
| アレキサンダーの暗帯                      | 34 | 左   | 下 1 | 漸化式 ( $\zeta_l^{(2)}(z)$ の導関数の) | 11 | 右   | 13   |
| XYZ 表色系                         | 38 | 右   | 1   | 漸化式 ( $\tau_l(\xi)$ の)          | 4  | 左   | 11   |
| ガウス記号                           | 1  | 右   | 12  | 漸化式 ( $D_l(z)$ の)               | 23 | 左   | 7    |
| 観測面                             | 17 | 左   | 7   | 漸化式 ( $\pi_l(\xi)$ の)           | 3  | 右   | 下 12 |
| 観測面                             | 38 | 右   | 11  | 漸化式 ( $P_l(\xi)$ の)             | 4  | 左   | 下 5  |
| 吸収断面積                           | 28 | 右   | 下 3 | 漸化式 ( $P_l^1(\xi)$ の)           | 3  | 左   | 下 1  |
| 球ノイマン関数                         | 8  | 左   | 8   | 漸化式 ( $P_l^1(\xi)$ の導関数の)       | 3  | 右   | 下 1  |
| 球ベッセル関数                         | 8  | 左   | 8   | 漸化式 ( $\psi_l(z)$ の)            | 10 | 左   | 10   |
| 球面調和関数                          | 2  | 左   | 13  | 漸化式 ( $\psi_l(z)$ の導関数の)        | 11 | 右   | 13   |
| 桁落ち                             | 1  | 左   | 10  | 前方散乱                            | 18 | 左   | 13   |
| 減衰                              | 29 | 右   | 20  | 第 1 種球ハンケル関数                    | 8  | 左   | 9    |
| 光源のスペクトル                        | 38 | 左   | 10  | 対日点                             | 34 | 左   | 8    |
| 後方散乱                            | 18 | 左   | 13  | 第 2 種球ハンケル関数                    | 8  | 左   | 9    |
| コンドン・ショートレイ                     | 2  | 右   | 8   | 等色関数                            | 38 | 右   | 3    |
| 散乱光の分布                          | 23 | 右   | 5   | 二項定理                            | 1  | 右   | 2    |
| 散乱断面積                           | 28 | 左   | 下 1 | 虹                               | 34 | 左   | 1    |
| CIE                             | 38 | 右   | 3   | 副虹                              | 34 | 左   | 7    |
| 色度                              | 38 | 左   | 下 3 | 分光反射率                           | 38 | 左   | 下 4  |
| 主虹                              | 34 | 左   | 下 2 | ポインティングベクトル                     | 16 | 左   | 17   |
| 情報落ち                            | 1  | 左   | 9   | 水の屈折率                           | 37 | 右   | 15   |
| 漸化式 ( $\chi_l(z)$ の)            | 10 | 左   | 11  | リカッチ・ベッセル関数                     | 8  | 左   | 16   |
| 漸化式 ( $\chi_l(z)$ の導関数の)        | 11 | 右   | 13  | ルジャンドルの多項式                      | 1  | 左   | 下 3  |
| 漸化式 ( $\zeta_l^{(1)}(z)$ の)     | 10 | 左   | 10  | ルジャンドル陪関数                       | 1  | 右   | 下 6  |
| 漸化式 ( $\zeta_l^{(1)}(z)$ の導関数の) | 11 | 右   | 13  | レイリー散乱                          | 18 | 左   | 7    |
| 漸化式 ( $\zeta_l^{(2)}(z)$ の)     | 10 | 左   | 10  | ロドリゲスの公式                        | 1  | 右   | 1    |



## ■ 人名

---

|               | 頁  | カラム | 行    |
|---------------|----|-----|------|
| Aden          | 24 | 右   | 下 12 |
| Angeli        | 14 | 人物  | 11   |
| Bernoulli, D. | 14 | 人物  | 20   |
| Bohren        | 24 | 右   | 下 9  |
| Born          | 5  | 左   | 1    |
| Bunsen        | 20 | 人物  | 17   |
| Dave          | 24 | 右   | 下 12 |
| Euler         | 14 | 人物  | 20   |
| Frankland     | 20 | 人物  | 16   |
| Huffman       | 24 | 右   | 下 9  |
| Infeld        | 24 | 右   | 下 13 |
| Knoblauch     | 20 | 人物  | 下 8  |
| Laven         | 24 | 右   | 下 4  |
| Mie           | 24 | 右   | 下 6  |
| Peter I       | 14 | 人物  | 14   |
| Prahl         | 24 | 右   | 下 3  |
| Riccati       | 14 | 人物  | 1    |
| Tyndall       | 20 | 人物  | 1    |
| Wiscombe      | 24 | 右   | 下 12 |
| Wolf          | 5  | 左   | 1    |

---

## 著者略歴

### 本宮佳典 (ほんぐう・よしのり), Yoshinori Hongu



1956年 神奈川県藤沢市生まれ  
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業  
1979年 東京大学理学部物理学科卒業  
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士  
同年, 株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事  
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー  
2018年 株式会社東芝 研究開発センター (2021.10退職)  
法政大学理工学部 (兼任講師) (2018.4~)

第20回 (2019年度) 応用物理学会業績賞 (教育業績) 受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。 <https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/>

## 波動光学の風景 ミー散乱編 (2)

2014年11月25日初版発行

2023年2月1日第2版発行

|     |                            |
|-----|----------------------------|
| 著者  | 本宮 佳典                      |
| 発行者 | 喜多 野乃子                     |
| 発行所 | アドコム・メディア株式会社              |
|     | 〒169-0073 東京都新宿区百人町2-21-27 |
|     | 電話 (03)3367-0571(代)        |

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2014

ISBN978-4-910636-20-7 C3042 ¥2200E

© Yoshinori Hongu 2014

印刷/製本 樹ブックフロント

Printed in Japan

・本書に掲載する著作物の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権  
(送信可能化権を含む) はアドコム・メディアが保有します。

・**JCOPY** <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、  
出版者著作権管理機構 (電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, E-mail [info@jcopy.or.jp](mailto:info@jcopy.or.jp)) の  
許諾を得てください。