波動光学の風景

散乱編

本宮佳典 著

試し読み

Advanced Communication Media
アドコム・メディア株式会社

はじめに

この電子書籍は，月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の，2012 年 9 月号から 2013 年 1 月号までに掲載された分をまとめたものである。電磁場のポテンシャルとヘルツベクトルを紹介し，これらの応用としてレイリー散乱，トムソン散乱の基本的な性質を導く。

散乱（scattering）は投射物（projectile）の状態が，標的（target）との相互作用によって変化する現象である。光の散乱では入射光が projectile，粒子が target に相当する。光と物質の基本的な相互作用の一つである。散乱は電場の振動方向に関わる現象であることから，電磁場のベクトル場としての挙動を理解することが必要である。

これまで，電磁場は電場と磁場を用いて表し，その挙動はマクスウェル方程式で表されるものとしてきた。しかしながら，ベクトル場の多くの成分を使って時間発展の法則や制約条件等が記述されるため，具体的な場を求める計算は煩雑になりがちである。これに対して本編では，ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル，あるいはさらに上位のポテンシャルであるヘルツベクトルを使って，電磁場および電磁場の従う法則を表す方法を紹介する。

ポテンシャルは，場を空間積分して得られる新たな場であり，いわば一段高い視点から電磁場を眺めるようなものである。そのため，同じ現象でも景観が一変して見えるかもしれない。しかし，決して難解な世界に入り込む訳ではない。場の成分の数は減り，成分相互の関係も整理され，計算も見通しよく，楽になる。分かりやすくなるのであるから心配には及ばず，新たな眺望を楽しみにして欲しい。むしろ初学者が躓きがちなのは，些細な誤解や錯覚等による場合が多いように思われる。本書ではポテンシャルを初めて学ぶ読者を想定し，基本的な概念や考え方，使い方などに疑問や誤解が残らぬよう，初歩的事項の説明に重きを置いて丁寧に説明するよう努めた。

ポテンシャルの適用事例として，レイリー散乱，トムソン散乱を紹介した。これらの散乱はいずれも，平面波の，微粒子（波長と比較して十分に小さいと見なせる標的）による弾性散乱（散乱前後の波長変化を無視できる散乱）という単純化されたモデルである。しかし，身近な現象を含む多くの現象の理解や応用に繋がるもので，幅広い読者に興味を持っていただけるものと思う。また，ポテンシャルを用いることの利点を実感できるモチーフであると思う。

第 90 章のヘルツベクトルでは，自由度についても説明を加えた。計算の便利のための精妙な技巧のようでもあるが，視界が開けてくるのを感じると，現象の本質的な理解に近づいているような気もしてくる。これもまた，味わい深い景観の一つである。

光の挙動に自然の妙を味わい，楽しみ，役立てていただく上で本書が少しでも読者諸賢のお役に立つなら，著者として何よりの幸いである。

2014 年　7 月　本宮佳典

目　次

第 86 回　88.　電磁場のポテンシャル
第 87 回　89.　遅延ポテンシャル
第 88 回　90.　ヘルツベクトル
第 89 回　91.　レイリー散乱
第 90 回　92.　トムソン散乱

波動光学の風景……86

88. 電磁場のポテンシャル

力学ではポテンシャルという概念が重要な役割を果たした，電磁気学でもポテンシャルを使うと電磁場を見通しよく扱うことができる。理論的な基礎としても重要であるし，具体的な問題を扱う際にも幅広く有効に使われている。まずはポテンシャルの基本的なところを見ておこう。

力学では，位置 $\boldsymbol{r}$ にある質点に力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$がはたらくものとして，基準点 $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ までの線積分

$$\phi = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \qquad (88\text{–}1)$$

を考える。任意の $\boldsymbol{r}$ に対して，ϕ が積分経路によらず一意的に定まるとき，式(88–1)でポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$が定義される。ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$が求まると，微分演算子を作用させることで，力の場が導かれる。今の場合，ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$に−grad を作用させると，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad}\phi \qquad (88\text{–}2)$$

となり，力の場（位置の関数としての力）が得られる。

式(88–1)の積分値が積分経路によらないためには，$\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ に至り $\boldsymbol{r}_0$ に戻る任意のループ C に沿った線積分が 0 になることが必要十分条件である。ストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (88\text{–}3)$$

が成り立つとすると，任意のループに対して積分が 0 になるための条件は，空間全体で

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0 \qquad (88\text{–}4)$$

が成り立つ（渦がない）ことがその条件である。空間の性質を表すのに，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$では 3 成分必要なのが，$\phi(\boldsymbol{r})$なら 1 成分で済むという便利さは大きな恩恵だが，式(88–4)のような場の物理的な性質が，場の表現法自体に組み込まれる価値も意識しておきたい。また，エネルギーの概念にもつながるなど，力学を理解する上で重要な概念である。

電磁気学の場合，基本とされるマクスウェルの方程式は $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ などの場で表される。そこで，微分演算子を作用させると $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ が導かれるものとして，ポテンシャルを導入する。ポテンシャルを使わなくても，波動光学をある程度までは理解できるし，それで十分な場合も多い。しかし，光の挙動を理解するためにも，あるいは具体的な計算のためにも，ポテンシャルは有用で基本的な重要概念である。これまで触れてこなかったが，そろそろ見ておくことにする。

電磁場のマクスウェル方程式は

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i} \qquad (88\text{–}5)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (88\text{–}6)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho \qquad (88\text{–}7)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \qquad (88\text{–}8)$$

と表される（$\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{i}$, ρ は位置 $\boldsymbol{r}$ および時間 t の関数）。

ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ は式(88–8)が成り立つので，あるベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$を使って

波動光学の風景……87

89. 遅延ポテンシャル

前章で見たように，μ, ε が実定数の（一様等方で透明な）媒質中で，電磁場の源となる電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{i}$ が与えられたとき，

$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{89–1}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{i} \tag{89–2}$$

および，ローレンツ条件の式

$$\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0 \tag{89–3}$$

からスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を求めれば，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{89–4}$$

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{89–5}$$

により求められることが分かった。さらに

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{89–6}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{89–7}$$

により $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{D}$ が定まる。以下では電磁場の源となる ρ, $\boldsymbol{i}$ が座標と時間の関数として与えられたとして，ϕ と $\boldsymbol{A}$ の具体的な表式を求める。

式(89–1), (89–2)は，ϕ および $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 各成分が同形の微分方程式を満たすことを示している。どの成分も同じ形の微分方程式なので，式(89–1)を例に ϕ を求めてみよう。まず，ϕ と ρ をそれぞれ周波数成分に分解する（フーリエ変換で表す）。すなわち，

$$\phi(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_\omega(x,y,z)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{89–8}$$

$$\rho(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(x,y,z)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{89–9}$$

とする。これらを式(89–1)に代入すると，ϕ_ω が満たすべき微分方程式が

$$(\nabla^2+\mu\varepsilon\omega^2)\phi_\omega=-\frac{\rho_\omega}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow\ \nabla^2\phi_\omega+k^2\phi_\omega=-\frac{\rho_\omega}{\varepsilon} \tag{89–10}$$

のように得られる。ただし，パラメーターk は

$$k=\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega=\frac{\omega}{c} \tag{89–11}$$

で定義したもので，ω の関数である。なお，媒質中の光速度を c で表した。

ここで，自由空間のグリーン関数として，外向き球面波

$$G_+(\boldsymbol{r})=\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\quad(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \tag{89–12}$$

を考える［時間変化を与える因子が $\exp(-i\omega t)$なので，外向きに進む波の位相因子は $\exp(ikr)$となる］。関数 $G_+(\boldsymbol{r})$は

$$\nabla^2G_+(\boldsymbol{r})+k^2G_+(\boldsymbol{r})=-\delta(\boldsymbol{r}) \tag{89–13}$$

を満たす（必要なら，第 65 章の式(65–15)を参照）。したがって，$G_+(\boldsymbol{r})$と ρ_ω/ε とのコンボリューションをとれば解が求まり，

波動光学の風景……88

90. ヘルツベクトル

等方的で一様な透明媒質中の電磁場を考える。前章で紹介したように，電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{i}$ が与えられたとき，

$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{90-1}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{i} \tag{90-2}$$

および，ローレンツ条件の式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{90-3}$$

を連立して求まる電磁場のポテンシャル ϕ と $\boldsymbol{A}$ を用いると，電磁場は

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{90-4}$$

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{90-5}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \tag{90-6}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{90-7}$$

のように求まる。特に遅延ポテンシャル

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho\left(x',\,y',\,z',\,t-\dfrac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{90-8}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{i}\left(x',\,y',\,z',\,t-\dfrac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{90-9}$$

（ただし，$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ とする）では，ρ と $\boldsymbol{i}$ が電荷の保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}=0 \tag{90-10}$$

を満足していれば，ローレンツ条件の式(90–3)は自動的に成り立つ（必要なら第 89 章を参照）。

マクスウェル方程式は，電磁場の 6 成分の場に対する 8 つの（時間発展を規定する式に限れば 6 つの）連立微分方程式である。これに対して，ポテンシャル ϕ と $\boldsymbol{A}$ を使うと，マクスウェル方程式の一部（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$ と $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$）が自動的に満たされることから，数式的に扱う上での見通しが良くなる。この考えを押し進め，微分演算子を作用させると ϕ や $\boldsymbol{A}$ を導くことのできる，さらに上位のポテンシャルを構成し，電荷の保存則が自動的に満たされるようにできると便利である。そのようなものとして，以下に紹介するヘルツベクトルがある。

電荷の保存則は式(90–10)で表される。これが自動的に満たされるような場を求めたい。そのヒントとして，分極電流と分極電荷が分極 $\boldsymbol{P}$ を使って，また，磁化電流が磁化 $\boldsymbol{M}$ を使って表せたことが参考になる（必要であれば，第 15 章を参照）。これと同様に，真電荷の電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{i}$ が与えられたときに，電流を 2 つの成分に分けて

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_2 \tag{90-11}$$

とし，新たなベクトル場 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{M}$ を導入して，

索　引

■ 事項

	頁	カラム	行
渦のない流れ	18	左	下 4
X 線回折	31	左	下 10
角度分布	24	左	13
グリーン関数	7	右	下 10
グリーンの定理	19	右	4
ゲージ変換	3	右	8
減衰	24	右	下 7
光学定理	29	右	14
後方散乱	24	左	下 11
公理論的電磁気学	5	右	下 6
コンボリューション	10	右	14
散乱係数	25	左	9
散乱光強度	24	左	13
散乱断面積	24	右	7
自然光	25	左	下 12
スカラーポテンシャル	2	左	13
ストークスの定理	1	左	下 6
先進ポテンシャル	9	左	11
双極子	20	左	9
双極子	22	左	5
単分子の分極率	25	右	10
遅延ポテンシャル	9	左	1
超ポテンシャル	14	左	20
電荷の保存則	11	左	下 4
電子の古典半径	32	左	7
電磁場のポテンシャル	2	左	15
特性インピーダンス	10	左	11
トムソン散乱	30	左	9
微小球	25	右	9
非偏光	25	左	下 12
微粒子の分極率	24	左	4
分子数密度	25	右	11
平面波	9	左	下 14
ベクトルポテンシャル	2	左	3
ヘルツベクトル	14	左	15
ヘルツベクトルの自由度	15	左	5
ヘルムホルツの定理	18	右	2
偏光	25	右	5
ポテンシャル	1	左	10
レイリー散乱	20	左	1
ローレンツゲージ	3	右	下 8
ローレンツ条件	3	右	下 9
ローレンツ・ローレンツの式	25	右	13
湧き出しのない流れ	18	左	下 3

索　引

■ 人名

	頁	カラム	行
Born	35	人物	下 4
Bragg	26	右	14
Bragg	35	人物	下 4
Compton	31	左	下 4
da Vinci	26	右	下 13
da Vinci	29	人物	1
Francis I	29	人物	下 4
Galvani	6	人物	15
Green	19	右	4
Helmholtz	18	右	2
Langevin	35	人物	下 4
Lorentz	25	右	13
Lorenz	3	右	下 9
Lorenz	25	右	13
Napoleon	6	人物	下 2
Oppenheimer	35	人物	下 5
Rayleigh	20	左	1
Rayleigh	30	左	1
Rayleigh	35	人物	12
Rutherford	35	人物	13
Sforza	29	人物	下 6
Thomson	30	左	1
Thomson	35	人物	1
Thomson, G	35	人物	下 3
Tyndall	26	右	下 11
van der Pol	35	人物	下 4
Verrocchio	29	人物	下 7
Volta	6	人物	1
Wilson	35	人物	下 5

■ 事項

	頁	カラム	行
∇^2	2	右	12

著者略歴

本宮佳典（ほんぐう・よしのり）, Yoshinori Hongu

1956年 神奈川県藤沢市生まれ
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業
1979年 東京大学理学部物理学科卒業
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士
同年，株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー
2018年 株式会社東芝 研究開発センター（2021.10退職）
法政大学理工学部（兼任講師）（2018.4〜）

第20回（2019年度）応用物理学会業績賞（教育業績）受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/

波動光学の風景　散乱編

2014年7月25日初版発行
2023年2月1日第2版発行

著　者　　本　宮　　佳　典
発行者　　喜　多　　野乃子
発行所　　アドコム・メディア株式会社
〒169-0073　東京都新宿区百人町2-21-27
電話　(03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2014
ISBN978-4-910636-18-4　C3042　¥1800E

© Yoshinori Hongu 2014

印刷/製本　㈱ブックフロント
Printed in Japan

・本書に掲載する著作物の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権（送信可能化権を含む）はアドコム・メディア㈱が保有します。
・ JCOPY ＜出版者著作権管理機構 委託出版物＞
本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088，FAX 03-5244-5089，E-mail info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。