波動光学の風景 光ビーム編

本宮佳典 著





はじめに

この電子書籍は,月刊 O plus E 誌の連載チュート リアル記事「波動光学の風景」の,2014年3月号から 2014年12月号までに掲載された分をまとめたもので ある。本編では光ビームの基本的な性質や品質指標の 不変性,代表的な高次横モード光ビームの表式,角運 動量などについて紹介する。

近年,レーザーポインターや照明効果用のレーザー ライトなどで光ビームを目にする機会も増えてきた。 レーザープリンターや光ディスク装置,光学式マウス やバーコードリーダーなど,内部で光ビームの使われ ている身近な装置も多い。産業用でも,照明,検知, 計測,通信,制御,加工など,幅広い分野で多種多様 な光ビームが用いられ,さらに先進的な研究の場でも, 様々な形の光ビームが使われている。光ビームについ ての理解は,幅広い応用分野の基礎として重要なもの となっている。

既刊の伝搬編では、伝搬方向のわずかずつ異なる多数の平面波が重畳されたものとして光ビームを紹介した。本編では、より基本的な視点から、改めて光ビームの一般的な性質を確認する。光ビームの幅と遠方での拡がり角との積は、一定の値より小さくはならない。 最小になるのはガウシアンビームである。また、光ビームの品質指標である M²因子に相当する量を構成すると、空間の伝搬や薄肉レンズの通過によって指標値は変化しない。シュワルツの不等式や線形演算子の交換 関係を使うと、これらを見通しよく導けることなどを 前半で紹介する。

後半では、近軸の波動方程式を紹介し、それに基づ いて改めてガウシアンビームを導く。また、代表的な 高次横モード光ビームであるエルミート・ガウシアン ビームとラゲール・ガウシアンビームの表式や、品質 指標の値を求める。

最後に,近年注目を集めているラゲール・ガウシア ンビームについて,近軸近似で電磁場をベクトル場と して構成し,エネルギーや運動量,軌道角運動量や, 偏光状態に由来する角運動量などの物理量を導き,相 互の関係などを眺めてみる。

登場する関数については,予備知識がなくても読み やすいように,必要な数式の導出等をなるべく丁寧に 紹介した。数式を追うのは気力も必要で煩わしいもの ではあるが,細部まで辻褄の合うことを見て,そこに 宿り給う自然の妙に触れられた気がすることもある。 ときには腰を据えて数式に向き合うようにすると,険 しく見えた峠も少しずつ緩い坂に見えてくることがあ る。そして峠の向こうに広がる景観を前にすれば,そ の先へ続く道も見えてくるのではないだろうか。

光ビームは幅広い分野で利用され,現在も活気ある 多くの研究分野の重要な要素であり,応用分野のさら なる広がりが期待される。関心ある読者諸賢のお役に 立つことができれば,著者として何よりの喜びである。

2015年2月 本宮佳典

- 第104回 106. シュワルツの不等式
- 第105回 107. 光ビームの幅と角度の拡がり
- 第106回 108. ガウス型の振幅分布
- 第107回 109. ガウス型の光ビーム
- 第108回 110. 光ビームの品質
- 第109回 111. 近軸の波動方程式
- 第110回 112. エルミート・ガウシアンビーム
- 第111回 113. ラゲール・ガウシアンビーム
- 第112回 114. 高次横モード光ビームの品質
- 第113回 115. 光ビームの角運動量



光ビームの幅を開口で制限して細いビームを生成する と、ビームの拡がり角は大きくなる。これをもう少し一 般的に示そうとするとき、シュワルツの不等式を使うと 便利である。本章では、この不等式を簡単に紹介する。 光の性質を考えるためには、複素数値関数を考える必要 があるが、まずは実関数の場合について説明し、次に複 素数値関数の場合を考える。

シュワルツの不等式は, コーシー・シュワルツの不等 式, あるいはコーシー・ブニャコフスキー・シュワルツ の不等式などとも呼ばれ, コーシーの不等式の拡張と見 ることができる。そこでまずコーシーの不等式である。 実数列 {*a*₁, *a*₂, …, *a*_n}, {*b*₁, *b*₂, …, *b*_n} に対して,

$$(a_{1}b_{1} + a_{2}b_{2} + \dots + a_{n}b_{n})^{2} \le (a_{1}^{2} + a_{2}^{2} + \dots + a_{n}^{2})(b_{1}^{2} + b_{2}^{2} + \dots + b_{n}^{2}) (106-1)$$

が成り立つというのがコーシーの不等式である。また, 任意の実関数 f(x), g(x)に対して,

$$\left[\int_{A}^{B} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]^{2} \leq \int_{A}^{B} \left[f(\boldsymbol{x})\right]^{2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_{A}^{B} \left[g(\boldsymbol{x})\right]^{2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
(106-2)

が成り立つというのがシュワルツの不等式である。

式(106-2)は,式(106-1)から導くことができる。関数 *u*(*x*)の積分を,図106-1のように,区分求積法で考えて,

$$\int_{A}^{B} u(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \frac{B - A}{n} \left[u(x_1) + u(x_2) + \dots + u(x_n) \right]$$
(106-3)

と表すことができるとする。このとき,式(106-1)と比較すると,

$$a_m = f(x_m)$$
 (106-4)
 $b_m = q(x_m)$ (106-5)

と対応させることで式(106–2)が導かれる。なお,積分 や極限をこのように扱える程度には,関数u(x)の性質 のよいことが必要である。また,積分の収束性がよけれ ば,A, Bは $-\infty, \infty$ でもよい。波動光学で通常想定され る関数は,十分に性質がよいと仮定,あるいは近似でき る。以下,式(106–1),(106–2)を証明するが,「すべて $0 a_m$ が0(m = 1, 2, ..., n)」,「関数f(x)が恒等的に 0(A < x < B)」の場合は,容易に証明できるので,以下 ではこれら以外の場合について考える。



図 106-1 区分求積法による積分



量子力学には不確定性原理と呼ばれる原理,あるいは 法則があり,例えば粒子の位置と運動量を同時には確定 できない^{1)~3)}。同時に確定値をとる状態がないのか,同 時に確定できる測定法がないのかよく分からないが,本 稿では量子力学には触れないので,心配には及ばない。

しかしながら、シュレーディンガー方程式の解である 波動関数と、ヘルムホルツ方程式の解である電磁場との 形式的類似性から、不確定性原理に類似した関係が、 「光ビームの幅」と「角度の拡がり」の間にも存在する。 その関係式について紹介する。

光が伝搬する場のモデルを図 107-1 に示した。時間 依存性が $exp(-i\omega t)$ で記述されるスカラー場を考える。 場の平面波展開が可能と仮定すると、0 < zにおける光 の複素振幅は



図 107-1 光が伝搬する場

$$\phi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y)$$
$$\times \exp\left(ik_x x + ik_y y + ik_z z\right) dk_x dk_y \qquad (107-1)$$

と表せる。ただし、 k_z は k_x と k_y の関数で、

$$k_{z}(k_{x}, k_{y}) = \begin{vmatrix} \sqrt{k^{2} - k_{x}^{2} - k_{y}^{2}} & (k_{x}^{2} + k_{y}^{2} \le k^{2}) \\ i\sqrt{k_{x}^{2} + k_{y}^{2} - k^{2}} & (k_{x}^{2} + k_{y}^{2} > k^{2}) \end{vmatrix}$$
(107-2)

で定義される。式中の k は、媒質の透磁率 μ (= μ_0)と誘 電率 ε , あるいは真空中の光速度 c_0 , 波長 λ_0 , 屈折率 n などを使って

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n = \omega \frac{1}{c_0} n = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n \quad (107-3)$$

のように与えられる。以下では透明媒質を考え、 ε , n, kは実数とする。また、ほぼ z 軸方向に進む光の場を考 え、 $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$ の領域以外では、 $\Phi(k_x, k_y)$ は無視でき るほど小さいものとする。

関数 $\Phi(k_x, k_y)$ は, 波数ベクトル $k = (k_x, k_y, k_z)$ を持つ 平面波成分の振幅と解釈できる。したがって、 $|\Phi(k_x, k_y)|^2$ は角度の拡がりを表すものであり、zが非常に大きな位 置の断面上の点 $(zk_x/k_z, zk_y/k_z, z)$ の強度分布に比例す る。

平面 z = 0 における場に注目するので、記法を簡略化 して

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{0}) \tag{107-4}$$

$$\begin{bmatrix} b, a \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a, b \end{bmatrix}$$
(110-18)
$$\begin{bmatrix} a, b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a, b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a, c \end{bmatrix}$$
(110-19)
$$\begin{bmatrix} a+b, c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a, c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b, c \end{bmatrix}$$
(110-20)
$$\begin{bmatrix} a^2, b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} a, b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a, b \end{bmatrix} a$$
(110-21)
$$\begin{bmatrix} a, b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a, b \end{bmatrix} b + b \begin{bmatrix} a, b \end{bmatrix}$$
(110-22)

などの関係が成り立つ [式(110–17)を使って確認でき る]。また,定数は任意の演算子と交換可能(交換関係 が恒等的に0となる)である。

式(110–16)の k_z に式(110–14)を代入し、定数が任意の演算子と交換可能であることを使うと、

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi | a | \phi \rangle = i \left\langle \phi \left| \left[a, k - \frac{k_x^2}{2k} - \frac{k_y^2}{2k} \right] \right| \phi \right\rangle$$
$$= -\frac{i}{2k} \langle \phi | \left[a, k_x^2 + k_y^2 \right] | \phi \rangle \qquad (110\text{-}23)$$

との関係が得られる。

蛇足だが物理量の時間微分が,古典力学においてはポ アソンの括弧式を用いて,量子力学においてはハイゼン ベルクの運動方程式で与えられる。これらの式を学ばれ た読者は,式(110-23)が(*z*を時間*t*に読みかえると) それらとよく似ていることを思い出されると思う。

式(110-23)を式(110-11)の中の各因子に適用してい く。その際, 演算子 aに相当するのは x^2 , k_x^2 , xk_x , k_xx などである。したがって y に関しては作用がなく, a は k_y と交換可能 ($[a, k_y] = 0$) である。このとき,式(110-21), (110-22)により, a は k_y^2 とも交換可能 ($[a, k_y^2] = 0$) であ る。したがって, a として x^2 , k_x^2 , xk_x , k_xx などの演算 子のみを考えるときは, さらに簡略化して

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi | a | \phi \rangle = -\frac{i}{2k} \langle \phi | [a, k_x^2] | \phi \rangle \qquad (110\text{-}24)$$

としてよい。これを,式(110-11)の中で,zによる微分 を含む各因子に適用していく。

まず x² については,

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi | x^2 | \phi \rangle = -\frac{i}{2k} \langle \phi | [x^2, k_x^2] | \phi \rangle \qquad (110\text{-}25)$$

となる。ここで,式(110-21),(110-22)を用いて, $[x^2, k_x^2]$ をより低い次数の交換関係で表すと,

$$[x^{2}, k_{x}^{2}] = x[x, k_{x}^{2}] + [x, k_{x}^{2}]x$$

$$= x([x, k_{x}]k_{x} + k_{x}[x, k_{x}])$$

$$+ ([x, k_{x}]k_{x} + k_{x}[x, k_{x}])x$$

$$= xik_{x} + xk_{x}i + ik_{x}x + k_{x}ix$$

$$= 2i(xk_{x} + k_{x}x)$$
(110-26)

となる。ただし,式(110-9)により,

$$\begin{bmatrix} x, k_x \end{bmatrix} = i$$

(::) $\begin{bmatrix} x, k_x \end{bmatrix} \phi = x \frac{1}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial (x\phi)}{\partial x} = i\phi$) (110-27)

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi | x^2 | \phi \rangle = \frac{1}{k} \langle \phi | x k_x + k_x x | \phi \rangle \qquad (110-28)$$

が得られる。

次に, k_x^2 については, 式(110-24)の $a \leftarrow k_x^2$ を代入して,

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi | k_x^2 | \phi \rangle = -\frac{i}{2k} \langle \phi | [k_x^2, k_x^2] | \phi \rangle = 0 \quad (110\text{-}29)$$

となる(平面波は自由空間での固有関数なので当然の結 論ではある)。

次に xk_x については,やはり式(110-24)から,

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi | x k_x | \phi \rangle = -\frac{i}{2k} \langle \phi | [x k_x, k_x^2] | \phi \rangle \qquad (110\text{-}30)$$

となる。ここで、

$$\begin{bmatrix} xk_x, k_x^2 \end{bmatrix} = xk_x^3 - k_x xk_x^2 + k_x xk_x^2 - k_x^2 xk_x \\ = \underbrace{\begin{bmatrix} x, k_x \end{bmatrix}}_{i} k_x^2 + k_x \underbrace{\begin{bmatrix} x, k_x \end{bmatrix}}_{i} k_x \\ = 2ik_x^2$$
(110-31)

を式(110-30)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \boldsymbol{\phi} | \boldsymbol{x} \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}} | \boldsymbol{\phi} \rangle = \frac{1}{k} \langle \boldsymbol{\phi} | \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^2 | \boldsymbol{\phi} \rangle \qquad (110\text{-}32)$$

が得られる。 最後に *k_xx* についても式(110–24)から, 式 (111-27) で与えられるビーム幅 w(z)の例を, 図 111-2 に示した。式(111-27)から分かるように、ビー ムウエスト位置 (z=0) では w(z)の値は w_0 であるが, ビームウエストからレイリー長だけ離れた位置 $(z=\pm z_R)$ でのビーム幅は, $\sqrt{2}w_0$ となる (余談 1 参照)。

また,同じビームについて式(111-29)で与えられる 曲率半径 R(z)を,図 111-3 に示した。曲率半径の極値 は, $\pm z_{\rm R}$ の位置でそれぞれ $\pm 2z_{\rm R}$ となる [R(z)の導関数 を 0 と置いても,相加相乗平均の関係からも導ける]。 また, $z \rightarrow \infty$ で R(z)は z に漸近する。

このように、式(111-21)の指数部を見ると、場の x, y 依存性が明らかになる。すなわち、z = -定の断面に おけるビーム形状は,振幅の 1/e 値半幅が w(z)のガウ シアンであること,等位相面の曲率半径は R(z)である ことなどが分かる。

次に式(111-21)の第1の因子である関数 A=C'/(z+iq_{0i}) の寄与に注目する。この因子の絶対値と位相に注目する と、

$$\frac{C'}{z+iq_{0i}} = \frac{C'}{z^2+q_{0i}^2} (z-iq_{0i}) = \frac{C'}{z^2+z_{\rm R}^2} (z+iz_{\rm R})$$
$$= \frac{C'}{\sqrt{z^2+z_{\rm R}^2}} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+z_{\rm R}^2}} + i\frac{z_{\rm R}}{\sqrt{z^2+z_{\rm R}^2}}\right) \quad (111-30)$$

と変形できる。



図 111-2 ビーム径の z 依存性



図 111-3 等位相面の曲率半径の z 依存性



前章では, 概ね *z* 方向に進む光の場を *u*(*x*, *y*, *z*) exp(*ik z*-*iωt*)と表すスカラー波近似で, 関数 *u* が満た す近軸の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
 (112-1)

を導き,その解としてガウシアンビームの表式を導いた。 本章では、より複雑な解の例として、エルミート・ガウ シアンビーム^{1),2)}の表式を導く。レーザー発振の際にし ばしば生ずる、高次の横モードを記述する際などに、よ く用いられる。

前章では,変数 z に対する依存性が緩やかな関数 A(z),q(z)を使って,

$$u(x, y, z) = A(z) \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right]$$
 (112-2)

という形の解を仮定した(第 111 章参照)。ここではこ れを少し一般化して,

$$u(x, y, z) = A(z)h_m\left(\frac{ax}{w(z)}\right)h_n\left(\frac{by}{w(z)}\right)$$
$$\times \exp\left[i\frac{k}{2}\frac{x^2+y^2}{q(z)}\right] \quad (112\text{-}3)$$

という形の解を探す。ただし、関数 q(z)は前章で見た ガウシアンビームの表式に現れた関数と同じであり、レ イリー長を $z_{\rm R}$ として、

$$q(z) = z - iz_{\rm R}$$
 (112-4)

とする。このとき、指数因子の指数部は、

$$\exp\left(i\frac{k}{2}\frac{x^2+y^2}{z-iz_{\rm R}}\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\left[w(z)\right]^2}\right)\exp\left(i\frac{k}{2}\frac{x^2+y^2}{R(z)}\right)$$
(112-5)

と変形することができ、1/e 値半幅がw(z)のガウス型 関数を表す。ただし、w(z)は

$$[w(z)]^{2} = \frac{2}{kz_{\rm R}} (z_{\rm R}^{2} + z^{2}) = w_{0}^{2} \left(1 + \frac{z^{2}}{z_{\rm R}^{2}}\right)$$
(112-6)

$$w_0^2 = \frac{2z_{\rm R}}{k} \tag{112-7}$$

で定義される [第 111 章, 式(111–27)~(111–28)参照]。 また,式(112–5)の関数 *R*(*z*)は

$$R(z) = \frac{1}{z} (z_{\rm R}^2 + z^2) = z + \frac{z_{\rm R}^2}{z}$$
(112-8)

で定義され,等位相面の曲率半径を表す[第111章,式(111-29)参照]。

このように、式(112-3)はガウス型の分布に関数 h_m と h_n が乗じられた形である。座標 x, y に関して変数が 分離されるので、それに応じた分布が予想される。また、 関数 h_m は必ず x/w(z)の形で x に依存し、関数 h_n も y/w(z)の形で y に依存するため、断面強度分布の形状 は、ガウス型の因子と同じ割合で拡大される。すなわち、 断面強度分布はどの断面でも、縦横の定数倍の違いを除



図 112-2 関数 $\psi_m(t)$ のグラフ

double precision t, fm, pi, y(6)pi=atan(1d0)*4 do 30 i=1,141 t=0.1d0*(i-71) fm=1 do 20 m=0,5 if(m.gt.1)fm=fm*m j=2**m y(m+1)=j*t**m do 10 k=1, int(m/2) j=-j*(m-2*k+2)*(m-2*k+1)/(4*k)y(m+1)=y(m+1)+j*t**(m-2*k) 10 continue y(m+1)=y(m+1)/sqrt(2**m*fm*sqrt(pi)) 20 continue write(16,600)t, (y(m)*exp(-(t**2)/2),m=1,6) 30 continue 600 format(7e16.8) stop end

図 112-3 関数 ψ_m(t)のグラフ (図 112-2) のデータ作成に用い たプログラム (FORTRAN77)

(補足 1) 式(112-3)を x で偏微分すると, $\frac{\partial u}{\partial u} = 4 \frac{a}{b'} \frac{a}{a} \frac{b'}{b} \frac{by}{b} \exp\left(\frac{i}{b} \frac{k}{x^2 + y^2}\right)$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = A \frac{w}{w} h_m \left(\frac{w}{w}\right) h_n \left(\frac{w}{w}\right) \exp\left(l \frac{2}{2} \frac{w}{q}\right) + \frac{iAkx}{q} h_m \left(\frac{ax}{w}\right) h_n \left(\frac{by}{w}\right) \exp\left(l \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{q}\right)$$
(112-50)

となる。さらに x で偏微分すると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \left\{ \frac{a^2}{w^2} h_m'' \left(\frac{ax}{w} \right) + 2 \frac{a}{w} \frac{ikx}{q} h_m' \left(\frac{ax}{w} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2 x^2}{q^2} \right) h_m \left(\frac{ax}{w} \right) \right\} \\ \left. \times h_n \left(\frac{by}{w} \right) \exp \left(i \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{q} \right)$$
(112-51)

図 112-3 関数 $\psi_m(t)$ のグラフ(図 112-2)のデータ作成に用い となる。同様にして y についても偏微分を 2 回繰り返すと

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A \left\{ \frac{b^2}{w^2} h_n'' \left(\frac{by}{w} \right) + 2 \frac{b}{w} \frac{iky}{q} h_n' \left(\frac{by}{w} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2 y^2}{q^2} \right) h_n \left(\frac{by}{w} \right) \right\} \\ \left. \times h_m \left(\frac{ax}{w} \right) \exp \left(i \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{q} \right)$$
(112-52)



前章で導いたエルミート・ガウシアンビームは、レー ザー発振の高次の横モードを表す際などによく用いられ るビームであった。本章では、*z*軸のまわりの回転対称 性に注目し、ラゲール・ガウシアンビーム^{1),2)}の表式を 導く。近年、軌道角運動量を持つ光ビーム^{3)~5)}として、 さらに偏光との組み合わせ⁶⁾なども含めて、多彩な現象 に注目され、応用にも期待が集まっている。

前章と同じく, 概ね z 方向に進む光の場を u(x, y, z)exp($ikz - i\omega t$)と表すスカラー波近似で考えるものと し, 近軸の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
(113-1)

から出発する(必要なら第 111 章を参照)。ここで,円 筒座標 **r**, **φ** を

$$x = r \cos \phi \tag{113-2}$$

$$y = r \sin \phi \tag{113-3}$$

として導入すると、式(113-1)は、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
(113-4)

となる(補足1)。

この解を導く際に、未知の関数 $A(z), f(r), \Phi(\phi)$ などを使って、

$$u(r, \phi, z) = A(z) f\left(\frac{ar}{w(z)}\right) \Phi(\phi) \exp\left(i\frac{k}{2}\frac{r^2}{q(z)}\right)$$
$$\left[=A(z) f\left(\frac{ar}{w(z)}\right) \Phi(\phi) \exp\left(-\frac{r^2}{\left[w(z)\right]^2} + i\frac{k}{2}\frac{r^2}{R(z)}\right)\right]$$
(113-5)

という形の解を探すことにする。ただし関数 f は, $r \to \infty$ の極限でガウス型と同様の r 依存性を持たないものと する(もしガウス型の因子を持つならば,最後の指数因 子に組み入れるものとする)。前章,前々章と同様に, 関数 q(z)を,

$$q(z) = z - iz_{\rm R} \tag{113-6}$$

とする。このとき, 関数 w(z), R(z)は

$$[w(z)]^{2} = \frac{2}{kz_{\rm R}} (z_{\rm R}^{2} + z^{2}) = w_{0}^{2} \left(1 + \frac{z^{2}}{z_{\rm R}^{2}} \right)$$
(113-7)

$$w_0^2 = \frac{2z_{\rm R}}{k} \tag{113-8}$$

$$R(z) = \frac{1}{z} (z_{\rm R}^2 + z^2) = z + \frac{z_{\rm R}^2}{z}$$
(113-9)

となる。ただし、 w_0 はw(z)の最小値、 z_R はレイリー 長と呼ばれるパラメーターである。断面強度分布 $|f|^2$ はr/w(z)の形でr に依存する (z 軸のどの位置でも、r 方向に定数倍すると同じr 依存性を持つ関数形となる)。

$$\frac{A'(z)}{A(z)} + \frac{1}{q(z)} = -i \frac{z_{\rm R}}{z_{\rm R}^2 + z^2} (2n + |l|)$$
(113-41)

となる。式(113-41)の解を求めると,

$$A = \frac{C_{n,|l|}}{w} \exp\left\{i(2n+|l|+1)\left[\arg(z+iz_{\rm R}) - \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$
$$= \frac{C_{n,|l|}}{w} \exp\left[-i(2n+|l|+1)\psi\right]$$
(113-42)

となる(補足7)。ただし、ψは

$$\psi = \tan^{-1} \frac{z}{z_{\rm R}} \tag{113-43}$$

で与えられる。

以上をまとめると [式(113-40)を式(113-32)に代入 し,式(113-36),(113-14)でtからrに変数を戻し,式 (113-18),(113-42)と共に式(113-5)に代入すると],

$$u(r, \phi, z) = \frac{C_{n,|l|}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} S_n^{|l|} \left(\frac{2r^2}{\lfloor w(z) \rfloor^2} \right)$$
$$\times \exp \lfloor il\phi - i(2n+|l|+1)\psi \rfloor$$
$$\times \exp \left(-\frac{r^2}{\lfloor w(z) \rfloor^2} + i\frac{kr^2}{2R(z)} \right) \quad (113-44)$$

が得られる。
比例定数
$$C_{n,|l|}$$
 は,

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} u(r,\phi,z)^{*}u(r,\phi,z)r \, dr \, d\phi = 1 \qquad (113-45)$$
となるように決める。式(113-45)の左辺は,

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} u^{*}(r,\phi,z)u(r,\phi,z)r \, dr \, d\phi$$

$$= |C_{n,|l|}|^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{2|l|} \left[S_{n}^{|l|}\left(\frac{2r^{2}}{w^{2}}\right)\right]^{2} \\ \times \exp\left(-\frac{2r^{2}}{w^{2}}\right) \frac{r \, dr}{w^{2}} \, d\phi$$

$$= \pi |C_{n,|l|}|^{2} \int_{0}^{\infty} t^{2|l|} \left[S_{n}^{|l|}(t^{2})\right]^{2} \exp(-t^{2}) t \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} |C_{n,|l|}|^{2} \int_{0}^{\infty} s^{|l|} \left[S_{n}^{|l|}(s)\right]^{2} \exp(-s) \, ds \qquad (113-46)$$

となる。

ソニンの多項式は、ロドリゲス (Rodrigues) の公式⁸⁾

$$S_n^m(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-m} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (e^{-x} x^{n+m})$$
(113-47)

によって与えることもできる(補足 8)。これを用いると,



図 113-3 関数 $\psi_n^m(t)$ のグラフ

などが導かれる。これらを使えば式(115-25)の列ベク トル部分の *x*, *y* 成分は容易に求められ,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{i}{k}\frac{\partial u^{*}}{\partial x}u\right) = \frac{1}{k}\cos\phi\left(\frac{kr}{R}\right)|u|^{2} - \frac{1}{k}l\frac{\sin\phi}{r}|u|^{2}$$
$$= \left(\frac{r}{R}\cos\phi - \frac{l}{kr}\sin\phi\right)|u|^{2} \quad (115-32)$$
$$\operatorname{Re}\left(\frac{-i}{k}u^{*}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{k}\sin\phi\left(\frac{kr}{R}\right)|u|^{2} + \frac{1}{k}l\frac{\cos\phi}{r}|u|^{2}$$
$$= \left(\frac{r}{R}\sin\phi + \frac{l}{kr}\cos\phi\right)|u|^{2} \quad (115-33)$$

となる。したがって、式(115-25)から、

$$\langle S_{\rm A} \rangle = \frac{|E_{\rm A0}|^2}{2c\mu_0} L^2 \begin{pmatrix} (r/R)\cos\phi - (l/kr)\sin\phi \\ (r/R)\sin\phi + (l/kr)\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix} |u|^2$$
(115-34)

となる。

式(115-34)のベクトルの部分で, r/R に比例する項は 波面が曲率を持つ効果で生じ, z が正(負) なら軸から 離れる(軸に近づく)方向にわずかに傾く。また, l/kr に比例する項は l の効果であり, l が正(負) であば右 (逆) ねじの回転方向に捩じれることを表す。なお, l が 0 でない場合, l/kr は $r \rightarrow 0$ で発散するが, $|u|^2$ は $r^{|2l|}$ に比例するので,場は発散しない。また,式(115–34) の $\langle S_A \rangle$ が等位相面に垂直であることは,式(115–2)からも確認できる (補足参照)。

図 115-1 にビームウエスト(原点)近傍の,光の場 $u(x, y, z)\exp(ikz)$ の等位相面のイメージを l が正の場 合について示す。ビームウエスト近傍では式(115-34) のベクトル部分の r/R に比例する項は無視できるため, 曲率のない螺旋階段のような形状になる。時間の経過と ともに、この螺旋階段が z 方向ヘシフトする。すなわ ち、z を固定して考えると、位相が一定の方向は時間と 共に x 軸方向 $\rightarrow y$ 軸方向となるように回転する。なお, この回転方向を左回りと呼ぶのは観測者が光を受ける向 きの場合であり、進行方向を向く場合は右回りになる。 どちらの習慣もあるので、文献等を参照する場合には注 意が必要である。

ビーム全体のエネルギー流は,

$$I_{A} = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \langle S_{A} \rangle \cdot \boldsymbol{e}_{z} \, r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{|E_{A0}|^{2}}{2c\mu_{0}} L^{2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} |u|^{2} \, r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{|E_{A0}|^{2}}{2c\mu_{0}} L^{2} \left(= c \frac{\varepsilon |E_{A0}|^{2}}{2} L^{2} \right)$$
(115-35)



図 115-1 関数 u(x, y, z) exp(ikz)の等位相面のイメージ (l>0 の場合:平行法)

■ 事項

	頁	カラム	行		頁	カラム	行
薄肉レンズ	26	右	8	光子	82	左	下 5
運動量密度	82	左	7	高次横モード	39	右	9
ABCD 行列	30	左	5	高次横モードのグイ位相	50	左	5
エネルギー流	81	右	下4	コーシー・シュワルツの不等式	1	左	8
M ² 因子	36	左	7	コーシーの不等式	1	左	15
M2因子	71	右	下4	コーシー・ブニャコフスキー・	1	+	0
M^2 因子	74	右	下 9	シュワルツの不等式	1	江	9
エルミート・ガウシアンビーム	46	左	6	コーシー・ラグランジュの恒等式	5	左	13
エルミート・ガウシアンビーム	68	左	5	自己共役演算子	8	右	1
エルミートの多項式	49	右	2	磁場	79	右	9
エルミートの多項式	68	右	下7	シュレーディンガー方程式	7	左	6
エルミートの微分方程式	47	右	10	シュワルツの不等式	1	左	8
演算子	8	左	下 9	焦点距離	26	右	5
円筒座標	57	左	下 9	焦点距離	34	左	下2
円偏光	85	右	下4	スカラー場	78	右	下 5
ガウシアンビーム	22	左	7	ストークスパラメーター	4	右	4
ガウシアンビーム	25	左	1	スピン角運動量	85	左	14
ガウス型関数	16	左	12	全運動量	82	左	13
ガウス記号	49	左	下1	ソニンの多項式	60	右	下 6
角運動量	82	右	9	ソニンの多項式	72	左	8
角運動量密度	82	左	下 2	ソニンの微分方程式	60	左	下4
確定特異点	59	左	下 9	調和振動子	47	右	下 9
角度の拡がり	7	右	下 6	直線偏光	85	右	下2
確率密度関数	11	左	10	直交関係	50	右	6
軌道角運動量	85	左	13	電場	79	左	1
逆フーリエ変換	8	左	3	等位相面	81	右	3
共役演算子	8	左	下1	凸レンズ	34	左	下2
行列式	5	右	下 3	内積	8	左	下 12
曲率半径	25	右	7	ハイゼンベルクの運動方程式	33	左	15
近軸の波動方程式	40	左	下 10	判別式	2	左	10
グイ位相	43	右	7	ビームウエスト	25	右	5
交換可能	33	左	7	光渦	86	左	5
交換関係	32	右	下 5	光ビームの品質	35	右	下 12

察 ら

■人名

■ 事項

	頁	カラム	行
光ビームの品質指標	68	右	下4
品質指標	72	左	13
フーリエ変換	8	左	2
不確定性原理	7	左	1
複素数值関数	3	左	下1
複素数列	2	右	12
分散	11	左	13
ベクトル場	78	右	下 6
ヘルムホルツ方程式	40	左	1
偏光	84	右	下1
偏光渦	86	左	5
ポアソンの括弧式	33	左	14
ポインティングベクトル	80	左	下 11
ライプニッツの公式	66	右	8
ラゲール・ガウシアンビーム	57	左	4
ラゲール・ガウシアンビーム	72	左	2
ラゲール・ガウシアンビーム	78	左	10
ラゲールの陪多項式	65	右	14
ラゲールの陪微分方程式	65	右	11
螺旋階段	81	右	9
レイリー長	41	右	下 9
ロドリゲスの公式	50	左	下1
ロドリゲスの公式	61	右	下 3

■人名

	頁	カラム	行	
Bohr	21	人物	17	
Born	21	人物	15	
Bunyakovsky	1	左	9	
Catalan	56	人物	15	

	頁	カラム	行
Cauchy	1	左	8
Cauchy	56	人物	下 5
de Broglie	13	人物	下 5
Dirac	13	人物	下 3
Euler	56	人物	14
Galois	56	人物	12
Gauss	56	人物	14
Gouy	45	右	6
Heisenberg	21	人物	1
Hermite	47	右	10
Hermite	56	人物	1
Jacobi	56	人物	17
Jordan	21	人物	18
Kummer	6	人物	12
Lagrange	56	人物	14
Laguerre	65	右	11
Leibniz	66	右	8
Liouville	56	人物	17
Pohlke	6	人物	10
Poincaré	56	人物	下1
Richard	56	人物	13
Rodrigues	50	左	下1
Rodrigues	61	右	下 3
Schrödinger	13	人物	1
Schwarz	1	左	8
Schwarz	6	人物	1
Siegman	45	右	8
Sommerfeld	21	人物	14
Sonine	60	左	下4
Weierstrass	6	人物	11
Weyl	13	人物	下 6
彌永昌吉	5	左	19

著者略歴 本宮佳典(ほんぐう・よしのり), Yoshinori Hongu

1956年 神奈川県藤沢市生まれ 1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業 1979年 東京大学理学部物理学科卒業 1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士 同年,株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事 2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー 2018年 株式会社東芝 研究開発センター (2021.10退職) 法政大学理工学部 (兼任講師) (2018.4~)

第20回(2019年度)応用物理学会業績賞(教育業績)受賞



「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/

波動光学の風景 光ビーム編

	2015年2月25日初版発行
	2023年2月1日第2版発行
著 者	本 宮 佳 典
発行者	喜 多 野乃子
発行所	アドコム・メディア株式会社
	〒169-0073 東京都新宿区百人町2-21-27
	電話 (03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2015 ISBN 978-4-910636-21-4 C 3042 ¥3600 E © Yoshinori Hongu 2015 印刷/製本(㈱ブックフロント Printed in Japan

・本書に掲載する著作物の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権
 (送信可能化権を含む)はアドコム・メディア㈱が保有します。

・ **JCOPY** <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、

出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, E-mail info@jcopy.orjp)の 許諾を得てください。