波動光学の風景

伝搬編

本宮佳典 著

試し読み

Advanced Communication Media
アドコム・メディア株式会社

はじめに

この電子書籍は，月刊 O plus E 誌の連載チュートリアル記事「波動光学の風景」の，2006 年 12 月号から 2007 年 10 月号までに掲載されたものをまとめたものである。本編では，光の伝搬に付随する電磁場の状況などについて，眺めてみる。

既巻で導いた単一周波数の平面波は理想化された概念だが，実際的な光を構成する基本的な要素と見ることができる。古典力学において，やはり理想化された概念である質点が，物質のモデルを構成する基本要素になっているのと類似している。

例えば，伝搬方向がわずかずつ異なる平面波が多数合成されたものとして，光ビームを理解することができる。また，周波数がわずかずつ異なる平面波が多数合成されたものとして，光パルスを扱うことができる。このように，平面波は，光の多様な在り方を理解するための基本的な要素と見ることができる。

光の持つ重要な性質として，エネルギーを伝える作用や，運動量を伝える作用がある。運動量を伝える作用は，力を伝える作用と見ることもできる。光が伝える力は大変弱いので，従来の光学では無視されることも多かった。しかし近年では，光ピンセットなどで実際に利用されており，今後も種々の活用が期待されている。そもそもエネルギーと運動量は対になる概念であるから，両者は並列して眺める方が位置づけも内容も理解しやすく，収まりもよいと思われる。

エネルギーも，運動量も，直接目で見ることのできない抽象的な概念である。質量を持たない光が，どこにどのように，エネルギーや運動量を保持し，伝えるのか，興味深いところである。これらを理解するために，マクスウェル方程式とローレンツ力の式から，エネルギーや運動量の密度，ポインティングベクトルやマクスウェルの応力テンソルなどの概念を導く。また，これらを平面波の表式に適用することで，光に伴って力学的な作用の伝搬する状況を眺めてみる。

一方，幾何光学では，光線の概念を用いて光の伝搬を記述する。光線という, 波動とは様相の異なる概念が，波動光学の視点からどのように基礎づけられるのかを，アイコナールという概念を介して紹介する。

光が伝わるという最も基本的な現象も，その基礎となる概念や現象をしっかり見ておくと，理解が深まって行く。諸現象の理解にも役に立つし，さらに興味深い光景も見えて来ると思う。読者にとって本書が，そのような興味を持って光の性質を見ていただくきっかけになれば幸いである。

2013 年 3 月　本宮 佳典

目　次

第 17 回　19.　光ビーム
第 18 回　20.　波束と群速度
第 19 回　21.　境界条件
第 20 回　22.　光のエネルギーと運動量
第 21 回　23.　光による力
第 22 回　24.　マクスウェルの応力テンソル
第 23 回　25.　導体で反射する s 偏光による力
第 24 回　26.　導体で反射する p 偏光による力
第 25 回　27.　媒質中の光と運動量
第 26 回　28.　幾何光学
第 27 回　29.　アイコナール

次に式(19－16)の変形であるが，式(19－12)すなわちガウシアンのフーリエ変換を与える式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\exp(-ik_x x)\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{\pi}w_0\exp\left(-\frac{w_0^2}{4}k_x^2\right) \qquad (19\text{–}27)$$

が，w_0 を複素数 $a+bi$ に拡張しても成立することを利用した。両辺はそれぞれ，w_0 が複素数であるとして見ても w_0 の関数として解析的である。したがって，解析接続して w_0 を複素数に拡張したと考えれば，複素関数に慣れている人には違和感もないかもしれない。しかし，念のため確認しておこう。式(19－27)が w_0 を複素数に拡張しても成立することを確認できれば，その逆変換を適用することで式(19－16)が導ける。

まず，式(19－27)に w_0 の代わりに複素数 $a+bi$ を入れて左辺を変形すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{(a+bi)^2}\right]\exp(-ik_x x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{(a+bi)^2}-ik_x x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{x}{a+bi}+i\frac{a+bi}{2}k_x\right)^2+\left(i\frac{a+bi}{2}k_x\right)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$=(a+bi)\exp\left[-\frac{(a+bi)^2}{4}k_x^2\right]\int_c\exp(-z^2)\mathrm{d}z \qquad (19\text{–}28)$$

となる。ここで，

$$z=\frac{x}{a+bi}+i\frac{a+bi}{2}k_x \qquad (19\text{–}29)$$

として，x に関する積分を，複素数 z 平面における経路 C（**図 19－5**）の積分に変形した。ただし a の符号は一般性を失わずに正とした。

ここで，$z=r\exp(i\phi)$として，被積分関数 $\exp(-z^2)$ の絶対値を考えると，

$$|\exp(-z^2)|=|\exp[-r^2(\cos2\phi+i\sin2\phi)]|$$
$$=\exp(-r^2\cos2\phi) \qquad (19\text{–}30)$$

となる。したがって $\cos2\phi>0$ となる領域，すなわち図 19－5 のハッチングされた領域では，$r\to\infty$ の極限で $1/r$ よりもはやく 0 に収束する。したがって，図 19－5 のように積分路を C から C′に変更したときに，C′の実数軸上でない部分の積分は，その部分を遠方に移動した極限で 0 となる。したがって，C′に沿った積分は，実数軸上の $-\infty$ から ∞ の積分と同じ値になる。もちろんこうなるためには，図 19－5 における積分路 C の傾きが$-45°$から $45°$の間に入っていなければならないが，そのためには $a^2>b^2$ であればよい。式(19－16)の場合についてみると，$a^2-b^2=\mathrm{Re}[(a+bi)^2]$は ${w_0}^2$ なのでこの条件は満足されている。したがって積分の値は式(19－26)より $\sqrt{\pi}$ となり，式(19－28)は

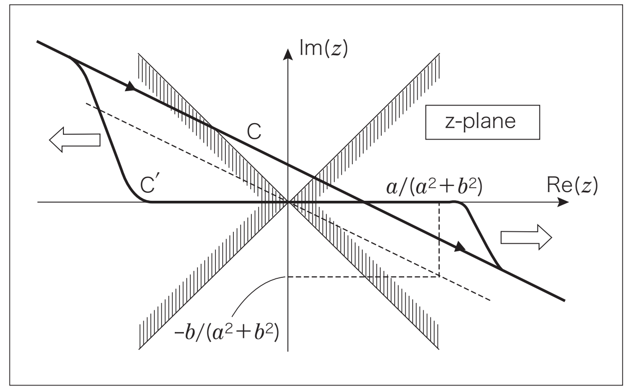

図 19－5　z 平面上の積分経路 C, C′

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{(a+bi)^2}\right]\exp(-ik_x x)\mathrm{d}x$$
$$=(a+bi)\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{(a+bi)^2}{4}k_x^2\right] \qquad (19\text{–}31)$$

となる。このことから式(19－16)の変形が導かれる。

Johann Carl Friedrich Gauss（Gauß）
1777 年 4 月 30 日ドイツの Braunschweig 生まれ，1855 年 2 月 23 日 Göttingen に没す。歴史上もっとも偉大な数学者の 1 人であり，物理学，測地学，天文学，光学等に業績を残した科学者でもある。幼少時から数学の才を示し，言葉を話すようになる前から計算をしていたと本人は述べている。1807 年に Göttingen の天文台長に就任して終生務めた。ガウスの名のつく定理や法則は数多いが，光学ではガウス光学，ガウス型レンズなどに名を残している。最愛の妻とは若くして死別，末の子供も間もなく亡くなり，再婚した妻にも先立たれるなど，私生活はあまり恵まれなかった。

でなければならない。すなわち，「$\boldsymbol{D}_1$と$\boldsymbol{D}_2$の法線方向成分が等しい」という条件が必要であることが分かる。同じことなので「$\boldsymbol{D}$の法線方向成分が連続」という表現もできる。表面電荷のある場合については後述するが，式(21－3)から$\boldsymbol{D}$と表面電荷ρとの関係を規定する条件が導かれる。

最後に，式(21－4)を図21－3の領域に適用すると，磁束密度$\boldsymbol{B}$に関する境界条件が得られる。先の場合と同様に積分領域の上下の面を境界面に近づける極限を考える。このとき，やはり同様の議論が成り立ち，「$\boldsymbol{B}_1$と$\boldsymbol{B}_2$の法線方向成分が等しい」あるいは「$\boldsymbol{B}$の法線方向成分が連続」という条件が必要であることが導かれる。

次章に説明するが，

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{21–11}$$

として定義されるポインティングベクトルは，光のエネルギー流の密度を表す。一般性を失わずに境界面に垂直にz軸をとると，ポインティングベクトルのz成分は

$$S_z=E_xH_y-E_yH_x \tag{21–12}$$

となる。右辺は$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{H}$の境界面内方向の成分だけで決まる量である。したがって，$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{H}$の面内方向成分が連続であるという境界条件からS_zが境界面で連続であることが分かる。これは，（表面電流がない場合に）光のエネルギーが境界面で消費されることがないことを示している。境界条件がそのための充分条件になっていることを意識しておきたい。

境界条件を，境界面の法線方向のベクトル$\boldsymbol{n}$を使って表現することもあり，便利なこともある。例えば，「$\boldsymbol{H}_1$と$\boldsymbol{H}_2$の面内方向成分が等しい」という条件は，「$\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1$は面内方向成分を持たない」と言い換えることができ，「$\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1$は$\boldsymbol{n}$と平行である」ということになる。すなわち，

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0 \tag{21–13}$$

と表せる。展開して移項すれば，

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1 \tag{21–14}$$

と書くこともできる。同様に，「$\boldsymbol{E}_1$と$\boldsymbol{E}_2$の面内方向成分が等しい」という条件は，

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1 \tag{21–15}$$

と書ける。また，「$\boldsymbol{D}_1$と$\boldsymbol{D}_2$の法線方向成分が等しい」という条件は式(21－10)で示した通り

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1 \tag{21–16}$$

と書くことができる。同様に，「$\boldsymbol{B}_1$と$\boldsymbol{B}_2$の法線方向成分が等しい」という条件は

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1 \tag{21–17}$$

と書ける。境界条件を式(21－14)～(21－17)の形で表すと，数式として扱う際に便利なことも多い。

さて，式(21－14)の条件を導く際に「電流密度$\boldsymbol{i}$が有限であれば」という仮定をした。また，式(21－16)の条件を導く際に「電荷密度ρが有限であれば」という条件を用いた。系が誘電体だけで構成されていればこの条件は満たされる。また，導体であっても，高周波の電磁場に対する応答を考えるときのように，誘電率

$$\varepsilon^*=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega} \qquad \text{再掲(18–6)}$$

を持つ誘電体として扱う際にも，式(21－14)，(21－16)を用いることができる。しかし，導体表面に真電荷や真電流が存在する場合，式(21－1)の右辺の第2項は積分領域を狭くしても0にならない。また，式(21－3)の右辺も，積分領域を薄くしても0にならない。

表面電流がある場合の境界の様子を**図21－4**に示す。この場合の磁場$\boldsymbol{H}$に関する境界条件を式(21－1)から導くと，式(21－14)の代わりに

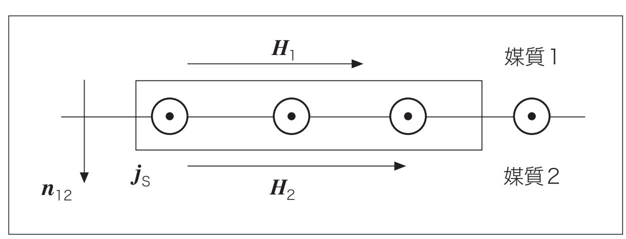

図21－4　表面電流のある場合

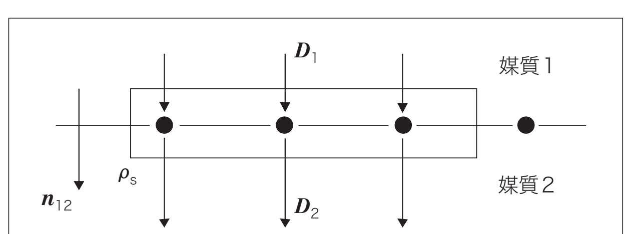

図21－5　表面電荷のある場合

波動光学の風景……20

22. 光のエネルギーと運動量

光がエネルギーを伴うことは，物体を暖めたり光電池の起電力になるなどの身近な現象でも認識される。光の反射率や透過率などという素朴な概念も，エネルギー流としての定量的な意味が付随することで現実的な意味やその重要性が理解される。

マクスウェル方程式が支配する電磁場の現象は，運動方程式が支配する力学現象とは別の世界の話のように見える。それにもかかわらず，電磁場にもエネルギーや運動量という概念が存在し，力学的なエネルギーや運動量との総和が保存するのは興味深いことである。話の発端に戻って考えるなら，第９章で$\boldsymbol{E}$や$\boldsymbol{B}$を導入する際に使ったローレンツ力の式

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{22–1}$$

に力学の概念である力$\boldsymbol{F}$や速度$\boldsymbol{v}$が入っている。ここに力学の概念と電磁気学の概念との接点がある。この式を基礎において電磁場のエネルギーや運動量が定式化されるため，力学系のエネルギーや運動量と整合する普遍性の高い概念が構成される。この辺りをよく見ておくと，光の強度や力学作用にかかわる現象の意味を理解しやすいであろう。

まず，式(22－1)から力学的な仕事に相当する量を導く。電荷qの粒子が単位体積あたりN個あって，速度$\boldsymbol{v}$で動いているとすると，電荷が電磁場から受ける単位時間，単位体積あたりの仕事の大きさは

$$N\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=Nq(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=Nq\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i} \tag{22–2}$$

となる。そこで改めてマクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{i} \tag{22–3}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{22–4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho \tag{22–5}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{22–6}$$

を眺めてみよう。ここで，式(22－3)の両辺の$\boldsymbol{E}$との内積をとると，

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i} \tag{22–7}$$

となり，$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{i}$の内積が現れる。同様に式(22－4)の両辺の$\boldsymbol{H}$との内積をとって

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{22–8}$$

という式を導いておく。これは，マクスウェル方程式を眺めると，式(22－3)から式(22－7)を導いたのと対になっていて対称性がよく，ベクトル解析の一般的な関係式

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \tag{22–9}$$

を使える形になる。式(22－9)は，左辺を成分表示して div, rot を適用していくと，

波動光学の風景……21

23. 光による力

光の持つ運動量や光の力学的な作用は，従来は光学というより電磁気学か電気力学の範疇で扱われる現象だったように思う。しかし，光による力を利用する光ピンセットなどの技術が普及し，光学技術者にもなじみ深い現象，あるいは当事者としてかかわる現象になってきている。

前章では，単位体積あたりに働くローレンツ力の式

$$\boldsymbol{f} = \rho_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{B} \tag{23–1}$$

と，マクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} \tag{23–2}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{23–3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{e}} \tag{23–4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{23–5}$$

から，真電荷密度 ρ_{e} と真電流（伝導電流）密度 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{e}}$ に及ぼされる力

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{grad}\varepsilon + \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{grad}\mu - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mu\boldsymbol{S}) \tag{23–6}$$

を導いた（前章では ρ や $\boldsymbol{i}$ に添え字をつけなかったが，ここでは e を付した）。

本章では，分極電荷に働く力も含めて，物質に働く力を考える。そのために，真空中のマクスウェル方程式を用いる。真空中のマクスウェル方程式を物質中に適用する場合は，電荷密度や電流密度として，物質の分極や磁化に由来する成分も含める。真空中のマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} &= \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{i}\\ &= \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}\\ &= \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}\end{aligned} \tag{23–7}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{23–8}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} &= \rho\\ &= \rho_{\mathrm{e}} + \rho_{\mathrm{d}}\\ &= \rho_{\mathrm{e}} - \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\end{aligned} \tag{23–9}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{23–10}$$

である。電荷密度と電流密度の内訳を $\rho = \rho_{\mathrm{e}} + \rho_{\mathrm{d}}$，$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ として示した。添え字 e は真電荷や真電流に由来するもの，d は分極電荷に由来するもの，m は磁化に由来するものをそれぞれ表す。真電荷や真電流だけでなく，分極電荷や磁化電流も含めたすべての電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{i}$ に働くローレンツ力を $\boldsymbol{f}'$ と表すと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}' &= (\rho_{\mathrm{e}} + \rho_{\mathrm{d}})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{i}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}) \times \boldsymbol{B}\\ &= \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}\\ &= \varepsilon_0\boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \times \boldsymbol{B}\end{aligned}$$

$$\rho_s = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D} = -\varepsilon_0 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(x,y,-0,t)$$
$$= -\varepsilon_0 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot 2E_0\begin{pmatrix}0\\0\\\sin\theta\end{pmatrix}\exp(ikx\sin\theta - i\omega t)$$
$$= -2\varepsilon_0 E_0 \sin\theta\exp(ikx\sin\theta - i\omega t) \qquad (26\text{–}17)$$

となることが分かる。また，導体表面の電流は，境界条件の式(21−18)を用いると，

$$\boldsymbol{j}_s = -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H} = -\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\boldsymbol{H}(x,y,-0,t)$$
$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times 2E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\exp(ikx\sin\theta - i\omega t)$$
$$= -2E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\exp(ikx\sin\theta - i\omega t) \qquad (26\text{–}18)$$

となることが分かる。ここで $\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\boldsymbol{j}_s$ を計算して式(26−9)を使うと，

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j}_s = \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{j}_s)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{j}_s)_y$$
$$= 2i\varepsilon_0 E_0 \omega\sin\theta\exp(ikx\sin\theta - i\omega t)$$
$$-2iE_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}k\sin\theta\exp(ikx\sin\theta - i\omega t) = 0 \qquad (26\text{–}19)$$

となり，表面電荷の保存則が満足されていることが確認できる。

導体で光が反射している状況が把握できてきたので，次に導体が受ける力について考えてみよう。導体と入射光，反射光のある状況を**図 26−2** に示す。図の面Σは，導体表面を含む薄い領域を囲む閉曲面であるとする。この面内の領域に働く力は，再掲式(23−21)により，

$$\boldsymbol{F} = \iint_\Sigma \boldsymbol{T}'\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s - \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \varepsilon_0\mu(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}v \qquad \text{再掲}(23\text{–}21)$$

となる。

ここで，第２項の積分は，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ が面Σの近傍で x 軸の方向を向いているため，面に働く力への寄与はない。あるいは第２項は場の量の時間微分であるから，周期的な振動場について計算しても時間平均をとれば値は０になる。

したがって，面に働く力 $\boldsymbol{F}$ への寄与は第１項のみである。第１項の積分の被積分関数に応力テンソル $\boldsymbol{T}'$ の式(23−18)を使う。すなわち，

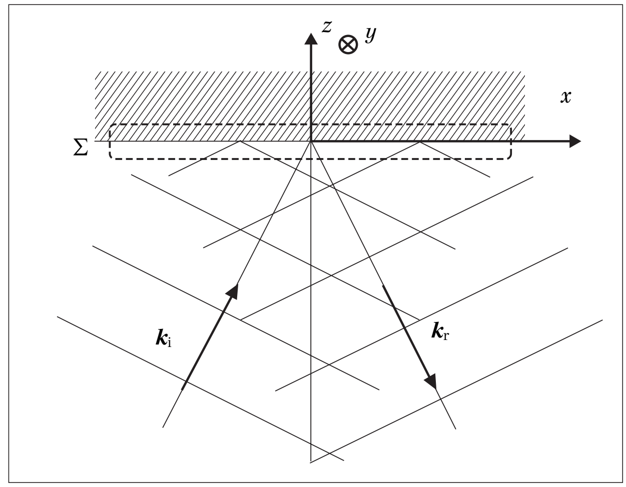

図 26−2　導体面の周りの光の場

$$\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{n} = \varepsilon_0\begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{E}|^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{E}|^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{E}|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$+\mu_0\begin{pmatrix} H_x^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2 & H_xH_y & H_xH_z \\ H_yH_x & H_y^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2 & H_yH_z \\ H_zH_x & H_zH_y & H_z^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad (26\text{–}20)$$

に対して，式(26−15)，(26−16)で $z\to 0$ としたものを代入すると，

$$\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_0}{2}E_z^2 - \frac{\mu_0}{2}H_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2}E_z^2 + \frac{\mu_0}{2}H_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0}{2}E_z^2 - \frac{\mu_0}{2}H_y^2 \end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = 2\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\theta\cos^2(kx\sin\theta - \omega t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (26\text{–}21)$$

となる。すなわち前章の場合と同じ大きさの圧力を受

波動光学の風景……27

29. アイコナール

幾何光学において光線の伝搬を記述する基本的な法則として光線方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)=\mathrm{grad}\ n \tag{29–1}$$

があることを前章で紹介した。波動光学に基づいてこの式を導くことを考える。

真空中のマクスウェル方程式において，時間発展が位相因子 $\exp(-i\omega t)$で記述される解を考えると，電場の x, y, z 成分も磁場の x, y, z 成分も同じ波動方程式

$$\nabla^2\phi+k_0^2\phi=0 \quad \left(\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) \tag{29–2}$$

を満たすことが導かれる（∇^2 はラプラス演算子）。ここで，k_0 は

$$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \tag{29–3}$$

で定義される。光速度 c_0 や波長 λ_0 との関係は，式(29−2)の平面波解を求めると分かるように，

$$k_0=\frac{\omega}{c_0}=\frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{29–4}$$

となる。

次に物質中の場合を考える。真電荷も真電流もなく，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ が成り立つ媒質を考え，ε_0 を物質の誘電率 ε に置き換える。すなわち，式(29−2)中の k_0 を

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}=\frac{n\omega}{c_0}=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{29–5}$$

で置き換えると，微分方程式

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=0 \tag{29–6}$$

が得られる（補足 1 参照）。

ここで，式(29−6)の解であって，

$$\phi(x,y,z)=A(x,y,z)\exp[ik_0S(x,y,z)] \tag{29–7}$$

という形のものを考える。関数 $A(x, y, z)$は振幅であり，指数部にある $k_0S(x, y, z)$が場の位相に相当する。関数 S は実関数であるとする。

関数 $S(x, y, z)$のイメージや特徴を把握するために，比較的簡単な場の例として，屈折率 n の媒質中を単位ベクトル $\boldsymbol{n}=(n_x, n_y, n_z)$の方向に進む平面波

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=A\exp[ik(n_xx+n_yy+n_zz)]\\&=A\exp[ink_0(n_xx+n_yy+n_zz)]\end{aligned} \tag{29–8}$$

を考えてみよう。この場合の関数 $S(x, y, z)$は，

$$S(x,y,z)=n(n_xx+n_yy+n_zz) \tag{29–9}$$

となる。**図 29−1** に示すように $\boldsymbol{n}$ に垂直な等高面（$S(x, y, z)$の値が一定となる面）を持つ。光線の方向に単位距離移動すると値が屈折率の値 n だけ増加する。すなわち，関数 $S(x, y, z)$の勾配（$\partial S/\partial x$ など）は屈折率のオーダーの量である。勾配は無次元量なので，長さの単位に nm を使っても m を使っても S の傾きの値は変わらない。平面波の場合の勾配は空間の到る場所で一定だが，一般の場でも勾配の大きさは屈折率のオーダ

索　引

事項

	頁	カラム	行
アイコナール	56	右	11
アイコナール方程式	56	右	11
位相速度	7	右	12
因果律	10	右	6
s 偏光	30	右	2
エネルギー	17	左	11
応力テンソル	19		下 2
応力テンソル	22	右	4
応力テンソル	25	左	2
応力テンソル	32	右	1
応力テンソル	38	左	下 2
応力テンソル	46	左	5
ガウシアンビーム	3	右	下 3
ガウス積分	5	右	14
幾何光学	50	左	2
境界条件	12	左	12
曲率半径	5	左	下 9
屈折の法則	51	右	17
群速度	8	左	下 5
光線方程式	50	左	下 2
最短光路長の原理	51	右	下 13
磁場のエネルギー密度	17	右	下 5
ジュール熱	17	右	下 9
進行波	43	右	5
スカラー波近似	2	左	下 10
スカラー場近似	2	左	下 10
スカラー場の方程式	2	左	19
スネルの法則	3	左	8
スネルの法則	51	右	6
積分形のマクスウェル方程式	12	左	17

	頁	カラム	行
直進	51	左	4
定在波	44	左	4
電気力線	23	右	下 3
電磁場の運動量	20	左	下 13
電磁場の運動量	33	左	下 4
電磁場のエネルギー密度	17	右	下 3
電磁場のエネルギー密度	44	右	5
電場のエネルギー密度	17	右	下 5
等アイコナール面	56	右	13
波頭速度	9	右	11
パルス光	7	左	12
反射の法則	51	右	15
搬送波	9	左	5
p 偏光	36	左	8
光ビーム	1	右	3
微分形のマクスウェル方程式	12	右	8
表面電荷	15	左	6
表面電荷	37	右	下 5
表面電流	14	右	下 3
表面電流	34	右	3
フェルマーの原理	51	右	下 14
輻射の圧力	42	右	6
輻射のエネルギー密度	42	右	6
ポインティングベクトル	14	左	15
ポインティングベクトル	17	左	下 10
ポインティングベクトル	44	右	8
包絡線	8	左	下 7
ローレンツ力	16	左	12
ローレンツ力	21	左	7
ローレンツ力	34	右	1

索　引

人名

	頁	カラム	行
Ampère	15	人物	1
Arago	11	人物	10
Bernoulli, Jacob	15	人物	11
Biot	15	人物	19
Biot	35	人物	1
Cauchy	15	人物	18
Clairaut	59	人物	14
Colburn	59	人物	9
d'Alembert	15	人物	11
Davy	24	人物	12
Diophantus	54	人物	14
Euler	15	人物	11
Faraday	24	人物	1
Fermat	54	人物	1
Fizeau	11	人物	1
Foucault	11	人物	13
Fresnel	15	人物	19
Gauss	6	人物	1
Hamilton	59	人物	1
Heaviside	20	人物	13
Heron	54	左	下 2
Lagrange	15	人物	12
Laplace	15	人物	19
Laplace	35	人物	12
Laplace	59	人物	15
Monge	35	人物	7
Newton	59	人物	14
Ørsted	15	人物	20
Ørsted	42	人物	1
Poynting	20	人物	1
Ritter	42	人物	12
Robertson	20	人物	16
Romagnosi	42	人物	19
Savart	35	人物	18
Wiles	54	人物	下 1

著者略歴

本宮佳典（ほんぐう・よしのり）, Yoshinori Hongu

1956年 神奈川県藤沢市生まれ
1975年 神奈川県立湘南高等学校卒業
1979年 東京大学理学部物理学科卒業
1984年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了 理学博士
同年，株式会社東芝入社 光応用機器の研究開発に従事
2012年 東芝リサーチ・コンサルティング株式会社 シニアフェロー
2018年 株式会社東芝 研究開発センター（2021.10退職）
法政大学理工学部（兼任講師）（2018.4～）

第20回（2019年度）応用物理学会業績賞（教育業績）受賞

「波動光学の風景」の情報は以下のURLで公開しています。https://www.adcom-media.co.jp/opluse/wave/

波動光学の風景　伝搬編

2013年3月26日初版発行
2023年2月1日第2版発行

著　者　　本　宮　　佳　典
発行者　　喜　多　　野乃子
発行所　　アドコム・メディア株式会社
〒169-0073　東京都新宿区百人町2-21-27
電話　(03)3367-0571(代)

Advanced Communication Media Co. Ltd., Tokyo, Japan, 2013
ISBN978-4-910636-11-5　C3042　¥4000E

印刷/製本　㈱ブックフロント
Printed in Japan